

MÁXIMO MITACC

LUIS TORO

TÓPICOS DE CÁLCULO

VOLUMEN 2

TERCERA EDICIÓN

www.FreeLibros.com

TOPICOS DE CALCULO

VOL. II

- INTEGRAL INDEFINIDA**
- INTEGRAL DEFINIDA**
- INTEGRALES IMPROPIAS**
- APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA**
- COORDENADAS POLARES**
- RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL**
- SUPERFICIES**

MAXIMO MITACC MEZA - LUIS TORO MOTA

TOPICOS DE CALCULO VOL. II

TERCERA EDICION

MAXIMO MITACC - LUIS TORO MOTA

IMPRESO EN EL PERU

PRINTED IN PERU

Prohibida la reproducción total o parcial por todos los medios gráficos, sin permiso de los autores.

Número de Inscripción en le Registro Nacional
de Derechos de Autor N° 160

Impreso en los Talleres Gráficos de:
Editorial THALES S.R.L.

TERCERA EDICION

Mayo del 2009

www.FreeLibros.com

PRÓLOGO

En esta segunda edición de Tópicos de Cálculo Vol. II, nos hemos esforzado por presentar el cálculo integral para funciones reales de una variable real y la geometría analítica en el espacio, en forma tal que resulte de máximo provecho a los estudiantes cuyo campo de especialización no sea estrictamente las matemáticas. La orientación principal del libro es hacia aplicaciones en diversas áreas de la ciencia, lo cual amplía la utilidad del texto.

Aunque en esta edición la estructura básica general no se ha cambiado, se ha realizado una gran cantidad de revisiones. Hemos reestructurado casi la totalidad del capítulo 6 y el capítulo 7, se han hecho una gran cantidad de modificaciones a lo largo de todo el libro, los cuales consisten en ejemplos adicionales desarrollados y redacción de procedimientos. El conjunto de ejercicios propuestos se ha modificado, con la adición de nuevos ejercicios.

El Libro se divide en siete capítulos. En los primeros cuatro capítulos se hace una presentación de la integral indefinida, integral definida, integral impropia, y sus aplicaciones. Hemos visto por conveniencia desarrollar primero la integral indefinida con la finalidad de familiarizar al estudiante con las técnicas y/o artificios de integración que luego se usan en los capítulos siguientes. El capítulo cinco trata sobre las coordenadas polares y sus aplicaciones. En los capítulos siguientes (del sexto al séptimo), se inicia con una introducción breve de vectores en el espacio tridimensional y se continúa con recta, plano, superficies y se concluye con las coordenadas cilíndricas y esféricas.

Nuestro propósito es que esta edición no tenga errores, pero es casi un axioma que todo libro de Matemática los presente; por tal motivo consideramos que este texto no sea la excepción, a pesar del esmero y la dedicación puesta para detectarlos y corregirlos antes de su impresión. En tal sentido, los autores compartimos la responsabilidad de los mismos, aclarando que dichos errores han sido cometidos solamente por uno de los autores.

Queremos expresar nuestro agradecimiento a los profesores y alumnos de todo el país por la acogida brindada a la edición anterior y esperamos que esta nueva edición tenga la misma preferencia.

Los Autores

INDICE

CAPITULO 1: INTEGRAL INDEFINIDA

Antiderivada e integración indefinida.....	1
Propiedades de la integral indefinida.....	4
Integrales inmediatas.....	5
Métodos de integración.....	10
Integración por sustitución o cambio de variable.....	11
Integración por partes	20
Técnicas de integración.....	29
Integrales de algunas funciones trigonométricas e hiperbólicas	32
Integrales de la forma $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ y $\int \sinh^m x \cosh^n x \, dx$	32
Integración por sustitución trigonométrica	45
Método de integración por descomposición en fracciones parciales	56
Integración de algunas funciones irracionales.....	68

CAPITULO 2: INTEGRAL DEFINIDA

Sumatorias.....	95
Cálculo del área de una región plana por sumatorias	104
Suma superior y suma inferior	112
Integrales inferiores y superiores	115
Integral de Riemann	116
Propiedades de la integral definida	120
Teoremas fundamentales del cálculo integral	121
Cambio de variable en una integral definida	130
Integración por partes en una integral definida	134
Cálculo aproximado de las integrales definidas.....	144

CAPITULO 3: INTEGRALES IMPROPIAS

Integrales impropias con límites infinitos.....	149
Integrales impropias con límites finitos	152
Integrales impropias con integrando no negativo.....	161

CAPITULO 4: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Área de regiones planas	167
-------------------------------	-----

Volumen de un sólido en función de las áreas de las secciones planas.....	181
Volumen de un sólido de revolución.....	185
Método del disco circular y del anillo circular.....	185
Método de la corteza cilíndrica	191
Longitud de arco	201
Área de una superficie de revolución	208
Momentos y centros de masa (ó centros de gravedad)	214
Aplicaciones de la integral en los negocios	229

CAPITULO 5: COORDENADAS POLARES

Sistema de coordenadas polares	237
Relación entre las coordenadas polares y las rectangulares	239
Distancia entre dos puntos en coordenadas polares	240
Ecuación polar de una recta	241
Ecuación polar de una circunferencia	243
Discusión y gráfica de una ecuación polar	244
Intersección de curvas en coordenadas polares	248
Derivadas y rectas tangentes en coordenadas polares	251
Ángulo entre dos curvas en coordenadas polares	254
Área de regiones en coordenadas polares	262
Longitud de arco en coordenadas polares	266
Volumen de un sólido de revolución en coordenadas polares....	268

CAPITULO 6: RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

TRIDIMENSIONAL

Vectores en el espacio tridimensional	273
Representación geométrica de un vector en \mathbb{R}^3	274
Vectores paralelos en \mathbb{R}^3	276
Módulo y longitud de un vector en \mathbb{R}^3	277
Ángulo entre dos vectores	278
Vectores ortogonales o perpendiculares.....	279
Producto vectorial	283
Aplicaciones del producto vectorial	285
Aplicación del triple producto escalar	287
Recta en el espacio	295
Relación entre los cosenos directores de una recta.....	296

Ecuaciones de un plano en el espacio	306
Ángulo entre dos planos	319
Proyección ortogonal de una recta sobre un plano	320

CAPITULO 7: SUPERFICIES

Esfera	342
Discusión y gráfica de la ecuación de una superficie	347
Cilindros	352
Superficie de revolución	356
Superficies cuadráticas	361
Coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas	369
Coordenadas esféricas.....	371
Aplicaciones	373

1

INTEGRAL INDEFINIDA

1.1 ANTIDERIVADA E INTEGRAL INDEFINIDA

En el libro de Tópicos de Cálculo Volumen I, se trató principalmente el problema básico siguiente: “Dada una función encontrar su derivada”. Sin embargo, existen muchas aplicaciones del cálculo que están relacionadas con el problema inverso, el cual es: “Dada una función f , definida en un intervalo I , encontrar una función F cuya derivada sea la función f , es decir,

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Definición 1. Sea I un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Una función $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, se denomina primitiva o antiderivada de f en I y se escribe

$$F(x) = \text{Ant}(f(x)), \forall x \in I$$

Ejemplo 1. Sea $f(x) = 4x^3$, $x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Las funciones $F(x) = x^4$ y $G(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, son respectivamente antiderivadas de f y g en \mathbb{R} , es decir,

$$F'(x) = (x^4)' = 4x^3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$G'(x) = (e^x)' = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

También son antiderivadas de $f(x) = 4x^3$ las funciones

$$F_1(x) = x^4 + 2, \quad F_2(x) = x^4 + \ln \pi \quad \text{y} \quad F_3(x) = x^4 + \frac{100\pi}{e}$$

pues sus derivadas son iguales a $f(x) = 4x^3$

Análogamente, otras antiderivadas de $g(x) = e^x$ son, por ejemplo,

$$G_1(x) = e^x - 1, \quad G_2(x) = e^x - e^e, \quad G_3(x) = e^x + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad G_4(x) = e^x + k$$

donde k es cualquier constante real.

Observación 1. Si $F(x) = \text{Ant}(f(x))$ en I , entonces $F(x) + C$, donde C es una constante real, es también antiderivada de f en I .

Esta propiedad es evidente, pues si $F(x) = \text{Ant}(f(x))$ en I , entonces

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

También $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$. Entonces

$$F(x) + C = \text{Ant}(f(x)) \text{ en } I$$

Una pregunta natural es: "Si $F(x) = \text{Ant}(f(x))$ en el intervalo I , ¿cualquier otra antiderivada de f en I difiere de F a lo más en una constante?". Dicho de otro modo, si $F_1(x) = \text{Ant}(f(x))$ en I , ¿necesariamente $F_1(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I$? La respuesta es afirmativa y se deduce de la siguiente proposición.

Proposición 1. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo abierto I y $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ una antiderivada o primitiva de f . Si $F_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ es también una antiderivada de f , entonces

$$F_1(x) = F(x) + C$$

para alguna constante C .

Demostración

Definimos la función H por $H(x) = F_1(x) - F(x)$. Entonces

$$H'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

Luego, $H'(x) = 0, \quad \forall x \in I$.

De aquí se deduce que $H(x) = C, \quad \forall x \in I$, donde C es una constante (ver Corolario 1 del T.V.M. Tópicos de Cálculo Vol. I). Luego, se tiene

$$H(x) = F_1(x) - F(x) = C \Leftrightarrow F_1(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I$$

Geoméricamente, significa que si $F(x) = \text{Ant}(f(x))$ en el intervalo I , cualquier otra antiderivada de f en I es una curva paralela al gráfico de $y = F(x)$ (Fig. 1.1).

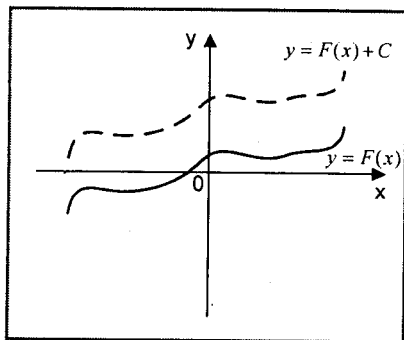


Fig. 1.1

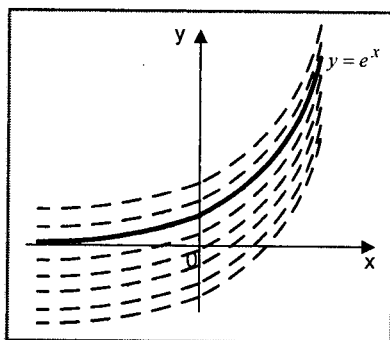


Fig. 1.2

Definición 2. Sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$ definida en el intervalo I . La **integral indefinida de $f(x)$** es el conjunto de todas las antiderivadas de $f(x)$ definidas en dicho intervalo y se representa mediante el símbolo

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde C es una constante real que se denomina **constante de integración**.

La función $f(x)$ se llama integrando, $f(x)dx$ es el elemento de integración, x variable de la integral y el símbolo \int se denomina símbolo de la integral. La expresión $\int f(x)dx$ se lee "integral de $f(x)$ con respecto a x " o "integral indefinida de $f(x)$ diferencial x ".

Observación 2. De la definición 2 se deduce las siguientes propiedades:

i) $\frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) = \left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x)$, es decir:

"la derivada de la integral indefinida es igual al integrando"

ii) $d \left[\int f(x)dx \right] = \left[\int f(x)dx \right]' dx = f(x)dx$

iii) Si f es una función derivable en I , entonces una primitiva de f' es f . Luego,

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

iv) Como $d(f(x)) = f'(x)dx$, de (iii) se deduce:

$$\int d(f(x)) = f(x) + C$$

De las propiedades ii) y iv), se concluye que la integral indefinida puede interpretarse como una operación inversa de la diferenciación, pues al aplicar la integral indefinida a la diferencial de la función $f(x)$, ésta reproduce la función $f(x)$ más la constante de integración.

Ejemplo 2. Del ejemplo 1 se deduce:

i) $\int e^x dx = e^x + C$

ii) $\int 4x^3 dx = x^4 + C$

En la figura 1.2 se muestra la gráfica de las antiderivadas de $f(x) = e^x$, es decir, de $F(x) = e^x + C$, donde C es una constante real. Si $C > 0$, la gráfica de $y = e^x$ se desplaza paralelamente C unidades hacia arriba y si $C < 0$, se desplaza paralelamente C unidades hacia abajo.

Ejemplo 3. Como $d(x \ln x - x) = \ln x \, dx$, por la obs. 2-iv, se deduce:

$$\int d(x \ln x - x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

Ejemplo 4. $\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$, pues

$$\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C \right)' = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{x^2}{4}} \right] = \frac{1}{4+x^2}$$

1.2 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Proposición 2. Si f y g son funciones que admiten antiderivadas en el intervalo I y k es una constante cualquiera, entonces las funciones $f \pm g$ y kf admiten antiderivadas en I y se tiene:

$$a) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$b) \int [kf(x)] dx = k \int f(x) dx$$

Demostración

$$a) \text{ Como } \left[\int [f(x) \pm g(x)] dx \right]' = f(x) \pm g(x) = \left[\int f(x) dx \right]' \pm \left[\int g(x) dx \right]',$$

entonces $\int [f(x) \pm g(x)] dx$ y $\int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ son las antiderivadas de $f(x) \pm g(x)$. Por tanto,

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

b) La demostración queda como ejercicio para el lector.

De la parte (a) se deduce que la integral indefinida de una suma algebraica de varias funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales.

Ejemplo 5. Calcule $\int (e^x - 4x^3 + \ln x) dx$.

Solución. En virtud de la proposición 2 y de los ejemplos 1, 2 y 3 se obtiene:

$$\begin{aligned} \int (e^x - 4x^3 + \ln x) dx &= \int e^x dx - \int 4x^3 dx + \int \ln x dx \\ &= (e^x + C_1) - (x^4 + C_2) + (x \ln x - x + C_3) \\ &= e^x - x^4 + x \ln x - x + C, \text{ donde } C = C_1 + C_2 + C_3 \end{aligned}$$

En lo que sigue solamente usaremos una constante única de integración para la suma de 2 o más funciones.

1.3 INTEGRALES INMEDIATAS

Si conocemos $f'(x)$, por la observación 2-iii se deduce que

$$\int f'(x) dx = f(x) + C \quad \text{ó} \quad \int d(f(x)) = f(x) + C$$

Esta integral se denomina integral inmediata. Por ejemplo, una integral inmediata es $\int dx = x + C$. Enseguida, presentaremos una tabla de integrales inmediatas, que contiene, además de las integrales de funciones elementales, otras que serán de mucha utilidad. Por comodidad, en lugar de la variable x usaremos la letra u . Más adelante, veremos que u puede ser una función, es decir, $u = u(x)$.

FÓRMULAS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

1. $\int du = u + C$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
3. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
4. $\int e^u du = e^u + C$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6. $\int \sin u du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u du = \sin u + C$
8. $\int \tan u du = \ln|\sec u| + C$
9. $\int \cot u du = \ln|\sin u| + C$
10. $\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
11. $\int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
12. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
13. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
14. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
15. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$
16. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
17. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
18. $\int \tanh u du = \ln|\cosh u| + C$
19. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
20. $\int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + C$
21. $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
22. $\int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + C$

$$23. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C, \quad (a > 0)$$

$$24. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, \quad (a > 0)$$

$$25. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C, \quad (a > 0)$$

$$26. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C, \quad (a > 0)$$

$$27. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$28. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C, \quad (a > 0)$$

$$29. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} \left[u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsen \frac{u}{a} \right] + C, \quad (a > 0)$$

$$30. \int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{1}{2} \left[u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) \right] + C$$

$$31. \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2} \left[u\sqrt{u^2 - a^2} - a^2 \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| \right] + C$$

Cada una de éstas fórmulas se pueden verificar mediante la derivación (respecto a la variable u).

Por ejemplo, en el caso de la fórmula 24 se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| \right) &= \frac{1}{2a} \left[\frac{d}{du} (\ln|u-a| - \ln|u+a|) \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u+a} \right] = \frac{1}{u^2 - a^2} \end{aligned}$$

Por tanto,
$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

En el caso de la fórmula 18, se tiene:

$$\frac{d}{du} (\ln|\cosh u|) = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \tanh u$$

De lo anterior se deduce que
$$\int \tanh u \, du = \ln|\cosh u| + C.$$

Ejemplo 6. Calcule $\int (6x^4 - x^2 + 3)du$.

Solución

Usando las fórmulas de integración, tenemos

$$\begin{aligned}\int (6x^4 - x^2 + 3)du &= \int 6x^4 dx - \int x^2 dx + \int 3 dx \\ &= 6 \int x^4 dx - \int x^2 dx + 3 \int dx \\ &= \frac{6}{5}x^5 - \frac{x^3}{3} + 3x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 7. Calcule $\int (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2 dx$.

Solución

Como $(\sqrt{2} - \sqrt{x})^2 = (2 - 2\sqrt{2}\sqrt{x} + x)$, entonces se obtiene

$$\begin{aligned}\int (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2 dx &= 2 \int dx - 2\sqrt{2} \int x^{1/2} dx + \int x dx \\ &= 2x - 2\sqrt{2} \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} + C \\ &= 2x - \frac{4}{3}\sqrt{2} x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

Ejemplo 8. Halle $\int \frac{3x^5 - 6x^2 + \sqrt{x}}{x^3} dx$.

Solución

Dividiendo término a término el integrando y aplicando las propiedades de la integral, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^5 - 6x^2 + \sqrt{x}}{x^3} dx &= 3 \int x^2 dx - 6 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-5/2} dx \\ &= x^3 - 6 \ln|x| - \frac{2}{3}x^{3/2} + C\end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores, el método para hallar las integrales consistió en tratar de descomponer el integrando como la suma algebraica de varias funciones y luego aplicar las propiedades enunciadas en la proposición 2. Este método es llamado "**método de integración por descomposición**". En ciertas funciones, descomponer la función en sumas parciales no es tarea fácil, pues depende de la experiencia, habilidad y práctica del que calcula.

Ejemplo 9. Calcule $\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x}$.

Solución

Como $\frac{1}{\sinh^2 x \cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x \cosh^2 x} = \operatorname{csch}^2 x - \operatorname{sech}^2 x$, entonces

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} = \int \operatorname{csch}^2 x \, dx - \int \operatorname{sech}^2 x \, dx = -\coth x - \tanh x + C$$

Ejemplo 10. Encuentre $\int \frac{x^2 + 2}{x^2(x^2 + 4)} \, dx$.

Solución

Expresando el numerador del integrando en términos de los factores del denominador, resulta

$$x^2 + 2 = x^2 + \frac{2}{4}(x^2 + 4 - x^2) = \frac{1}{2}[(x^2 + 4) + x^2]$$

Ahora, escribimos la integral como la suma de dos integrales (haciendo las simplificaciones en cada integrando) y obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{x^2(x^2 + 4)} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + (x^2 + 4)}{x^2(x^2 + 4)} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \arctan \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Halle $I = \int \frac{x^2 - 5}{x^2(x^2 - 9)} \, dx$

Solución

Procediendo del mismo modo que en el ejemplo anterior, resulta

$$x^2 - 5 = x^2 + \frac{5}{9}(x^2 - 9 - x^2) = \frac{5}{9}(x^2 - 9) + \frac{4}{9}x^2$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{4}{9}x^2 + \frac{5}{9}(x^2 - 9)}{x^2(x^2 - 9)} \, dx = \frac{4}{9} \int \frac{dx}{x^2 - 9} + \frac{5}{9} \int \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+3}{x-3} \right| - \frac{5}{9x} + C = \frac{2}{27} \ln \left| \frac{x+3}{x-3} \right| - \frac{5}{9x} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 12. Halle $I = \int \frac{3 dx}{x^2(x^2 + 5)}$

Solución

Usando el mismo procedimiento de los ejemplos anteriores, se obtiene

$$3 = \frac{3}{5}(x^2 + 5 - x^2) = \frac{3}{5}(x^2 + 5) - \frac{3}{5}x^2. \text{ Luego,}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{3}{5}(x^2 + 5) - \frac{3}{5}x^2 dx}{x^2(x^2 + 5)} = \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2 + 5} \\ &= -\frac{3}{5x} - \frac{3}{5\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 13. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en \mathbb{R} tal que

$$f(0) = 2 \quad \text{y} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \in (-\infty; 1) \wedge x \neq 0 \\ e^x, & x > 1 \end{cases}$$

Determine $f(x)$.

Solución

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \infty < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ e^x, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x + C_1, & x \leq 0 \\ x + C_2, & 0 < x \leq 1 \\ e^x + C_3, & x > 1 \end{cases}$$

De la continuidad de f en \mathbb{R} , se tiene

$$\text{i) } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow 2 = C_1 = C_2 \quad (1)$$

$$\text{ii) } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 + C_2 = e + C_3 \quad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2), se obtiene: $C_1 = 2$, $C_2 = 2$ y $C_3 = e - 3$.

$$\text{Por tanto, } f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \leq 0 \\ x + 2, & 0 < x \leq 1 \\ e^x + e - 3, & x > 1 \end{cases}$$

Observación 3. Una identidad útil en el proceso de integración es

$$\frac{1}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a - u} + \frac{1}{a + u} \right]$$

Ejemplo 14. Calcule $\int \frac{dx}{x^4 - 9}$.

Solución

Usando la identidad de la observación 3, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4 - 9} &= -\frac{1}{6} \int \left[\frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{3 - x^2} \right] dx \\ &= -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} \right| \right] + C\end{aligned}$$

Ejemplo 15. Encuentre $\int \frac{x^2 + 13}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$.

Solución

Trabajando de manera adecuada en el numerador del integrando, se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 13}{\sqrt{x^2 + 9}} dx &= \int \frac{(x^2 + 9) + 4}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int \sqrt{x^2 + 9} dx + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}} \\ &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + 9} + 9 \ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) \right] + 4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) + C \\ &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + 9} + 17 \ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) \right] + C\end{aligned}$$

1.4 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Antes de presentar los métodos de integración “por sustitución o cambio de variable” y “por partes”, es necesario hacer notar una diferencia esencial entre las operaciones de derivación y de integración. Dada una función elemental (función que se obtiene mediante un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones de las funciones: constante, potencia ($y = x^\alpha$), exponencial ($y = a^x$), logarítmica ($y = \log_a x$), trigonométricas y trigonométricas inversas), su derivada mantiene la misma estructura, es decir, también se expresa como una función elemental, mientras que en la integral indefinida, esto solamente sucede en condiciones muy especiales.

Por ejemplo, las integrales simples como

$$\begin{aligned}&\int e^{-x^2} dx, \quad \int e^{x^2} dx, \quad \int \frac{\sen x}{x} dx, \quad \int \frac{\tan x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x} \\ &\int \sqrt{1 + x^3} dx, \quad \int \sen(x^2) dx, \quad \int \cos(x^2) dx\end{aligned}$$

no pueden ser expresadas en términos de “combinaciones finitas” de funciones elementales.

Del punto de vista práctico, la integración se presenta como una operación más complicada que la derivación, pues ésta tiene reglas generales de derivación; mientras que para la integración es posible hacer artificios que son válidos para clases particulares de funciones. Cada caso particular requiere un ensayo, una tentativa, por lo que se recomienda práctica, más práctica y más práctica.

1.4.1 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Para hallar la integral indefinida por este método, dividimos nuestro análisis en dos partes: reconocimiento del modelo y cambio de variable.

En el reconocimiento del modelo realizamos la sustitución mentalmente, mientras que en cambio de variable escribimos los pasos de la sustitución.

El procedimiento de sustitución en la integración es comparable con la regla de la cadena en la derivación. Recuerde que para funciones derivables $y = f(u)$ y $u = g(x)$, la regla de la cadena establece

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Si hacemos la sustitución $u = g(x)$, entonces a partir de la definición de la integral definida tenemos

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C = f(u) + C$$

Así, hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 3. Si $y = f(u)$ es una función derivable de u , $u = g(x)$ es una función derivable de x y F es una antiderivada de f , entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad (\text{Reconocimiento del modelo})$$

Si hacemos el cambio de variable $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$. Luego,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

Ejemplo 16. Calcule $\int (x^3 + 1)^4 3x^2 dx$.

Solución

Sea $t = x^3 + 1$, entonces $dt = 3x^2 dx$. Luego,

$$\int (x^3 + 1)^4 3x^2 dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{(x^3 + 1)^5}{5} + C$$

Ejemplo 17. Halle la integral $\int \frac{x^4}{\sqrt[7]{x^5+1}} dx$.

Solución

Si $t = x^5 + 1$, se tiene $dt = 5x^4 dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{\sqrt[7]{x^5+1}} dx &= \frac{1}{5} \int \frac{5x^4 dx}{\sqrt[7]{x^5+1}} = \frac{1}{5} \int t^{-1/7} dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{6} t^{6/7} + C \\ &= \frac{7}{30} \sqrt[7]{(x^5+1)^6} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 18. Calcule la integral $\int \frac{5e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

Solución

Si $u = e^x$, se tiene $du = e^x dx$. Luego, se obtiene

$$\int \frac{5e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = 5 \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 5 \arcsen u + C = 5 \arcsen(e^x) + C$$

Ejemplo 19. Calcule $I = \int \frac{\sinh x \cosh x}{(1 + \sinh^2 x)^5} dx$.

Solución

Si consideramos $u = 1 + \sinh^2 x$, se tiene $du = 2 \sinh x \cosh x dx$. Luego,

$$I = \int \frac{\frac{1}{2} du}{u^5} = \frac{1}{2} \int u^{-5} du = \frac{1}{2} \frac{u^{-4}}{(-4)} + C = -\frac{1}{8(1 + \sinh^2 x)^4} + C$$

Ejemplo 20. Halle $\int \frac{\arcsen \sqrt{x} dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

Solución

Si se hace $u = \arcsen \sqrt{x}$, se tiene $du = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2\sqrt{x-x^2}}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsen \sqrt{x} dx}{\sqrt{x-x^2}} &= \int 2u du = u^2 + C = [\arcsen \sqrt{x}]^2 + C \\ &= \arcsen^2 \sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Observación 4. En ciertos casos, es necesario realizar algunas operaciones en el integrando para que el cambio de variable sea más fácil de realizar.

Ejemplo 21. Calcule $I = \int \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos(5\sqrt{x} + 4)}}} \cdot x^{-1/2} dx$.

Solución

En el integrando, aplicamos la identidad trigonométrica

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad \text{ó} \quad 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2[1 + \cos(5\sqrt{x} + 4)]}}} \cdot x^{-1/2} dx \\ &= \int \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{5\sqrt{x} + 4}{2}}} \cdot x^{-1/2} dx = \int \sqrt{2 + 2 \cos \frac{5\sqrt{x} + 4}{4}} \cdot x^{-1/2} dx \\ &= \int 2 \cos \left(\frac{5\sqrt{x} + 4}{8} \right) \cdot x^{-1/2} dx \end{aligned}$$

Si $u = \frac{5\sqrt{x} + 4}{8}$, entonces $du = \frac{5}{16} x^{-1/2} dx \Leftrightarrow \frac{16}{5} du = x^{-1/2} dx$. Luego,

$$I = \frac{32}{5} \int \cos u \, du = \frac{32}{5} \sin u + C = \frac{32}{5} \sin \left(\frac{5\sqrt{x} + 4}{8} \right) + C$$

Ejemplo 22. Halle $I = \int \frac{x \, dx}{e^{3x}(1-x)^4}$.

Solución

Luego de expresar el denominador en una sola potencia, tenemos

$$I = \int \frac{x e^x \, dx}{e^{4x}(1-x)^4} = \int \frac{x e^x \, dx}{(e^x - x e^x)^4}$$

Luego, hacemos $u = e^x - x e^x$. Entonces $du = -x e^x dx \Leftrightarrow -du = x e^x dx$.

De esta manera, se obtiene:

$$I = \int \frac{du}{u^4} = \frac{1}{3u^3} + C = \frac{1}{3e^{3x}(1-x)^3} + C$$

Ejemplo 23. Calcule $I = \int \frac{(x^2 - 1)dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}$.

Solución

Dividiendo el numerador y el denominador entre x^2 , se tiene

$$I = \int \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2} dx}{\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x}} = \int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x + \frac{1}{x}\right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}$$

Si $u = x + \frac{1}{x}$, entonces $du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

y $u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow u^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Por tanto, se obtiene

$$I = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsec} \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{2}|x|} \right) + C$$

Ejemplo 24. Calcule $I = \int \frac{x + 2}{(x - 2)^4} dx$.

Solución

Si hacemos $u = x - 2$, se tiene $du = dx$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(u + 4)du}{u^4} = \int (u^{-3} + 4u^{-4}) du \\ &= -\frac{u^{-2}}{2} - \frac{4}{3} u^{-3} + C = -\frac{3x + 2}{6(x - 2)^3} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 25. Calcule $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}$.

Solución

La integral puede escribirse como

$$I = \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}}$$

Si consideramos $u = 1 + \sqrt{x^2 + 1}$, entonces $du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Luego,

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2} du = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} + C$$

Ejemplo 26. Calcule $I = \int x\sqrt{x+4} dx$.

Solución

Si se hace $u = \sqrt{x+4}$, entonces $u^2 = x+4$ y $dx = 2u du$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} I &= \int (u^2 - 4)u \cdot 2u du = \int (2u^4 - 8u^2) du = 2 \frac{u^5}{5} - \frac{8}{3} u^3 + C \\ &= \frac{(x+4)^{3/2}}{15} (6x - 16) + C \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. $\int (\sqrt{x} + 3) dx$

R. $\frac{2}{3} x^{3/2} + 3x + C$

2. $\int \sqrt{x}(x+1) dx$

R. $\frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + C$

3. $\int \frac{4 dx}{\sqrt{6-x^2}}$

R. $4 \arcsen \frac{x}{\sqrt{6}} + C$

4. $\int \frac{dx}{x(x^2-8)}$

R. $-\frac{1}{16} \ln \left| \frac{x^2}{x^2-8} \right| + C$

5. $\int \frac{7x^2+16}{x^4+4x^2}$

R. $\frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} - \frac{4}{x} + C$

6. $\int \frac{18 dx}{9x^2-x^4}$

R. $-\frac{2}{x} - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$

7. $\int \frac{3 dx}{x^2+4x-5}$

R. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C$

8. $\int \frac{4 dx}{\sqrt{-4x^2-20x-9}}$

R. $2 \arcsen \frac{2x+5}{4} + C$

9. $\int \sqrt{-4x^2-12x-5} dx$

R. $\frac{1}{4} \left[(2x+3) \sqrt{-4x^2-12x-5} + 4 \arcsen \frac{2x+3}{2} \right] + C$

10. $\int \frac{2^x 3^{x+1}}{5^{x+2}} dx$

R. $\frac{3}{25} \left(\frac{6}{5} \right)^x \left(\frac{1}{\ln 6 - \ln 5} \right) + C$

11. $\int \frac{\sinh x dx}{(1 + \cosh x)^3}$

R. $-\frac{1}{2(1 + \cosh x)^2} + C$

12. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-4x)}$

R. $-\frac{1}{4} \tan(1-4x) + C$

13. $\int \cos(7x + 4) dx$ R. $\frac{1}{7} \sin(7x + 4) + C$
14. $\int e^{(2x-5)} dx$ R. $\frac{1}{2} e^{(2x-5)} + C$
15. $\int (\ln x + 1) e^{x \ln x} dx$ R. $x^x + C$
16. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$ R. $-\frac{1}{\ln x} + C$
17. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ R. $\ln|\ln x| + C$
18. $\int 4^x e^x dx$ R. $\frac{(4e)^x}{1 + \ln 4} + C$
19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[3]{\cot x - 1}}$ R. $-\frac{3}{2} (\cot x - 1)^{2/3} + C$
20. $\int \frac{\sin x e^{\tan^2 x}}{\cos^3 x} dx$ R. $\frac{1}{2} e^{\tan^2 x} + C$
21. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} 3e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ R. $\frac{2(3e^{\sqrt{x}})}{\ln 3} + C$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2) \ln(x + \sqrt{1+x^2})}}$ R. $2\sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} + C$
23. $\int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(x^2 + 1) + 1}{1 + x^2} dx$ R. $e^{\arctan x} + \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \arctan x + C$
24. $\int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx$ R. $\sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + C$
25. $\int \frac{dx}{1 + \cos 10x}$ R. $\frac{1}{10} \tan 5x + C$
26. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}}$ R. $2(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x}) - 2[\arctan \sqrt{2x+1} + \arctan \sqrt{x}] + C$
27. $\int \frac{(x^2 - 2x + 1)^{1/5}}{1 - x} dx$ R. $-\frac{5}{2} (x - 1)^{2/5} + C$

28. $\int x^{2x}(\ln x + 1)dx$ R. $\frac{x^{2x}}{2} + C$
29. $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$ R. $\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$
30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$ R. $\frac{1}{3}[(x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2}] + C$
31. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$ R. $\tan x - \sec x + C$
32. $\int \frac{x - \arctan 2x}{1 + 4x^2} dx$ R. $\frac{1}{8} \ln(1 + 4x^2) - \frac{1}{2} \arctan^2(2x) + C$
33. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$ R. $\frac{1}{2} \ln^2(\ln x) + C$
34. $\int \frac{dx}{2^x + 3}$ R. $\frac{1}{3} \left[x - \frac{1}{\ln 2} \ln(2^x + 3) \right] + C$
35. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ R. $2 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C$
36. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2 - \sin^4 x}} dx$ R. $\frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right) + C$
37. $\int \frac{dx}{4 + 5 \cos^2 x}$ R. $\frac{1}{6} \arctan\left(\frac{2 \tan x}{3}\right) + C$
38. $\int \frac{dx}{4 + 5 \sin^2 x}$ R. $-\frac{1}{6} \arctan\left(\frac{2 \cot x}{3}\right) + C$
39. $\int \frac{dx}{e^x + 4}$ R. $-\frac{1}{4} \ln(1 + 4e^{-x}) + C$
40. $\int \frac{\ln 3x}{x \ln 5x} dx$ R. $\ln \frac{3}{5} \ln |\ln 5x| + \ln x + C$
41. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1 + x^2}} dx$ R. $\frac{2}{3} \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]^{3/2} + C$
42. $\int \sqrt{1 + \sin x} dx$ R. $-2\sqrt{1 - \sin x} + C$
43. $\int \sqrt{1 + \cos x} dx$ R. $2\sqrt{1 - \cos x} + C$
44. $\int \frac{dx}{e^{-x} + e^x}$ R. $\arctan(e^x) + C$

45. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$ R. $\frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{3/2} - 4(\sqrt{x}+1)^{1/2} + C$
46. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} dx$ R. $[\arctan \sqrt{x}]^2 + C$
47. $\int \frac{(x-2)}{x\sqrt{x-1}\sqrt{x^2-x+1}} dx$ R. $2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right) + C$
48. $\int x^{2 \operatorname{sen} x-1} (\operatorname{sen} x + x \cos x \ln x) dx$ R. $\frac{1}{2} x^{2 \operatorname{sen} x} + C$
49. $\int \frac{dx}{e^{\ln(2x)} \sqrt{\ln x + \sqrt{\ln x + \dots + \infty} - x}}$ R. $\sqrt{\ln x + \sqrt{\ln x + \dots + \infty}} + C$
50. $\int \frac{\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10}{\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x} dx$ R. $2 \operatorname{sen} x + C$
51. $\int \frac{\operatorname{sen} 8x dx}{9 + \operatorname{sen}^4 4x}$ R. $\frac{1}{12} \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}^2 4x}{3}\right) + C$
52. $\int \frac{\cos^2 x (\tan^2 x + 1)}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} dx$ R. $-\frac{1}{1 + \tan x} + C$
53. $\int \frac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x} dx$ R. $\ln|\sec x + \tan x| - \ln(\sec x) + C$
54. $\int \csc^3 x dx$ R. $-\frac{1}{2} [\csc x \cot x + \ln|\csc x - \cot x|] + C$
55. $\int \sec^3 x dx$ R. $\frac{1}{2} [\ln|\sec x + \tan x| + \sec x \tan x] + C$
56. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}} dx$ R. $\frac{2}{5} (e^x - 1)^{3/2} - 2(e^x + 1)^{1/2} + C$
57. $\int \frac{\sqrt{e^x-1} e^{\arctan x} + \ln\left[(1+x^2)\sqrt{x^2 e^x - x^2} - 1\right] + \sqrt{e^x-1}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{e^x+x^2 e^x - x^2} - 1} dx$
R. $e^{\arctan x} + \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) + \arctan x + C$
58. $\int \frac{x dx}{(x-1)^5 e^{4x}}$ R. $-\frac{1}{4(x-1)^4 e^{4x}} + C$

$$59. \int \frac{2e^x + e^{-x}}{3e^x - 4e^{-x}} dx \quad R. \ln \left| \sqrt[3]{3e^{2x} - 4} \sqrt[3]{3 - e^{-2x}} \right| + C$$

$$60. \int \frac{\ln x \, dx}{x^3(\ln x - 1)^3} \quad R. -\frac{1}{2x^2(\ln x - 1)^2} + C$$

$$61. \int \frac{4 \, dx}{\cos x \sqrt{1 - \sin 2x + 2\cos^2 x}} \quad R. 4 \ln[(\tan x - 1) + \sqrt{\tan^2 x - 2 \tan x + 3}] + C$$

$$62. \int (4 - 3 \ln x)^4 d(\ln x) \quad R. -\frac{1}{15} (4 - 3 \ln x)^5 + C$$

$$63. \int \frac{e^x \sqrt{e^x + 2}}{e^x + 6} dx \quad R. 2\sqrt{e^x + 2} - 4 \arctan \frac{\sqrt{e^x + 2}}{2} + C$$

$$64. \int \frac{x^5 \, dx}{x^3 - 8} \quad R. \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3} \ln|x^3 - 8| + C$$

$$65. \int \frac{1 + \tan x}{\sin 2x} dx \quad R. \frac{1}{2} \ln|\csc 2x - \cot 2x| + \tan x + C$$

66. Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathbb{R} y satisface:

$$f(0) = -\frac{\pi}{2} \quad y \quad f'(x) = \frac{x + |1 - x|}{x^2 + 1}. \quad \text{Halle } f(x).$$

$$R. f(x) = \begin{cases} \arctan x - \frac{\pi}{2}, & x \leq 1 \\ \ln(x^2 + 1) - \arctan x - \ln 2, & x > 1 \end{cases}$$

67. Halle la ecuación de la curva para el cual $y'' = \frac{4}{x^3}$ y que es tangente a la recta $2x + y = 5$ en el punto $(1; 3)$

$$R. y = \frac{2}{x} + 1$$

68. Halle la ecuación de la curva cuya tangente en el punto $(0; 2)$ es horizontal y tiene punto de inflexión en $\left(-1; \frac{10}{3}\right)$ y $y''' = 4$.

$$R. y = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2$$

69. Encuentre la antiderivada de $f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$, de modo que dicha antiderivada pase por $P\left(0; \frac{709}{280}\right)$

$$R. (1+x)^{3/2} \left[\frac{3}{8}(1+x)^2 - \frac{6}{5}(1+x) + \frac{3}{2} + \frac{6}{7}\sqrt{1+x} \right] + 1$$

1.4.2 MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean u y v dos funciones definidas y derivables en el intervalo I . Por la regla de la diferencial del producto, se tiene

$$d(uv) = u dv + v du$$

Podemos reescribir la expresión como

$$u dv = d(uv) - v du$$

Integrando ambos lados de la igualdad se obtiene la fórmula

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Esta fórmula es conocida como **fórmula de integración por partes**.

Observación 5. La idea básica de la integración por partes consiste en calcular la integral original mediante el cálculo de otra integral, la cual se espera que sea más simple de resolver que la integral original dada.

Para descomponer el elemento de integración en dos factores u y dv , normalmente se elige como la función u aquella parte del integrando que se simplifica con la derivación y dv será el factor restante del elemento de integración. Ésta no es una regla general, pues en la práctica la habilidad y la experiencia del que calcula son las mejores herramientas.

Observación 6. Cuando se determina la función v a partir de su diferencial dv , no es necesario considerar la constante de integración, pues si en lugar de v se considera $v + C$, C constante, entonces

$$\int u dv = u(v + C) - \int (v + C) du = uv - \int v du$$

Esto significa que la constante C considerada no figura en el resultado final.

Ejemplo 27. Calcule $\int \ln x \, dx$.

Solución

De acuerdo con la sugerencia dada en la observación 2, elegimos

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \quad (\text{no se considera la constante de integración})$$

Por la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{x \, dx}{x} = x \ln x - x + C$$

Ejemplo 28. Calcule $I = \int (x^2 + 3x - 1)e^{2x} dx$.

Solución

Escogemos

$$\begin{cases} u = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow du = (2x + 3)dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

Luego, obtenemos

$$I = \frac{1}{2} (x^2 + 3x - 1) e^{2x} - \int \left(x + \frac{3}{2} \right) e^{2x} dx$$

En la última integral (más simple que la original) aplicamos nuevamente la integración por partes con

$$\begin{cases} u = x + \frac{3}{2} \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} (x^2 + 3x - 1) e^{2x} - \left[\left(x + \frac{3}{2} \right) \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \right] \\ &= (x^2 + 2x - 2) \frac{e^{2x}}{2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 29. Calcule $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$.

Solución

Escogemos

$$\begin{cases} u = e^{ax} \Rightarrow du = a e^{ax} dx \\ dv = \cos bx \, dx \Rightarrow v = \frac{1}{b} \sin bx \end{cases}$$

Entonces,

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \int \frac{a}{b} e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{b} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

Integrando nuevamente por partes en $\int e^{ax} \sin bx \, dx$, escogemos

$$\begin{cases} u = e^{ax} \Rightarrow du = a e^{ax} dx \\ dv = \sin bx \, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{cases}$$

De esta manera, se obtiene

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b} \left[-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right] \quad \text{ó}$$

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I$$

Ahora, se despeja I de la última ecuación y al resultado final se suma la constante de integración

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) I = e^{ax} \left(\frac{\operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a \cos bx}{b^2} \right)$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx) + C$$

Ejemplo 30. Calcule $I = \int \sec^5 x \, dx$.

Solución

En primer lugar, escribimos la integral dada como

$$I = \int \sec^5 x \, dx = \int \sec^3 x \cdot \sec^2 x \, dx$$

En la última integral, utilizamos integración por partes eligiendo

$$\begin{cases} u = \sec^3 x \Rightarrow du = 3\sec^3 x \tan x \, dx \\ dv = \sec^2 x \, dx \Rightarrow v = \tan x \end{cases}$$

Entonces,

$$I = \tan x \sec^3 x - \int 3 \sec^3 x \tan^2 x \, dx$$

$$I = \tan x \sec^3 x - \int 3 \sec^3 x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$I = \tan x \sec^3 x - 3 \int \sec^5 x \, dx + 3 \int \sec^3 x \, dx$$

$$I = \tan x \sec^3 x - 3I + 3 \int \sqrt{1 + \tan^2 x} \sec^2 x \, dx$$

$$4I = \tan x \sec^3 x + \frac{3}{2} (\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|)$$

$$I = \frac{1}{4} \tan x \sec^3 x + \frac{3}{8} (\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

Ejemplo 31. Calcule $\int x \arctan x \, dx$.

Solución

Escogemos

$$\begin{cases} u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x \, dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Luego,

$$I = \int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{1+x^2}$$

Para calcular la integral $\int \frac{x^2 \, dx}{1+x^2}$, se efectúa la división y se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + C = \frac{(x^2+1)}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

Ejemplo 32. Calcule $I = \int \frac{\cos x + x \sen x - 1}{(\sen x - x)^2} dx$.

Solución

Utilizando la identidad $\sen^2 x + \cos^2 x = 1$, escribimos la integral como

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos x + x \sen x - \sen^2 x - \cos^2 x}{(\sen x - x)^2} dx \\ I &= \int \frac{-\cos x (\cos x - 1) - \sen x (\sen x - x)}{(\sen x - x)^2} dx \\ I &= \underbrace{\int \frac{-\cos x (\cos x - 1)}{(\sen x - x)^2} dx}_J - \int \frac{\sen x \, dx}{(\sen x - x)} \end{aligned}$$

Para la integral J , aplicamos la integración por partes con

$$\begin{cases} u = -\cos x \Rightarrow du = \sen x \, dx \\ dv = \frac{(\cos x - 1) dx}{(\sen x - x)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{(\sen x - x)} \end{cases}$$

Luego,

$$I = \frac{\cos x}{\sen x - x} + \int \frac{\sen x \, dx}{(\sen x - x)} - \int \frac{\sen x \, dx}{(\sen x - x)}$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{\cos x}{\sen x - x} + C$$

Ejemplo 33. Calcule $I = \int \frac{e^x(1+x \ln x)}{x} dx$.

Solución

Separando la integral en la suma de dos integrales, se tiene

$$I = \int \frac{e^x}{x} dx + \underbrace{\int e^x \ln x dx}_J$$

Para la integral J , hacemos $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

Así,

$$I = \int \frac{e^x}{x} dx + \left[e^x \ln x - \int \frac{e^x}{x} dx \right] = e^x \ln x + C$$

Ejemplo 34. Calcule $I = \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

Solución

Como la integral de $\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ es inmediata, elegimos

$$\begin{cases} u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow du = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} dx \\ dv = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx \Rightarrow v = e^{\arctan x} \end{cases}$$

Luego, tenemos

$$I = \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \underbrace{\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx}_J$$

En la integral J consideramos

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow du = -\frac{x dx}{(1+x^2)^{3/2}} \\ dv = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx \Rightarrow v = e^{\arctan x} \end{cases}$$

Luego, se tiene

$$I = \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \left[\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} + \underbrace{\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx}_I \right]$$

Por tanto,
$$I = \frac{1}{2} \frac{e^{\arctan x}(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Otra forma de calcular la integral del ejemplo anterior es hacer el cambio de variable $t = \arctan x$ y la integral se transforma en $\int e^t \sen t \, dt$.

Ejemplo 35. Calcule $I = \int \frac{\sinh^2 x \, dx}{(x \cosh x - \sinh x)^2}$.

Solución

Multiplicando y dividiendo entre x , se tiene

$$I = \int \frac{\sinh x}{x} \cdot \frac{x \sinh x \, dx}{(x \cosh x - \sinh x)^2}$$

Ahora escogemos

$$\begin{cases} u = \frac{\sinh x}{x} \Rightarrow du = \frac{x \cosh x - \sinh x}{x^2} dx \\ dv = \frac{x \sinh x}{(x \cosh x - \sinh x)^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x \cosh x - \sinh x} \end{cases}$$

Entonces

$$I = \frac{\sinh x}{x(\sinh x - x \cosh x)} + \int \frac{dx}{x^2}$$

$$I = \frac{\sinh x}{x(\sinh x - x \cosh x)} - \frac{1}{x} + C$$

Ejemplo 36. Calcule $I = \int \frac{e^{\sen x} (x \cos^3 x - \sen x)}{\cos^2 x} dx$.

Solución

$$\text{Tenemos } I = \underbrace{\int x e^{\sen x} \cos x \, dx}_{I_1} - \underbrace{\int e^{\sen x} \cdot \frac{\sen x}{\cos^2 x} dx}_{I_2}$$

En I_1 , haciendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{\sen x} \cos x \, dx \Rightarrow v = e^{\sen x} \end{cases}$ se obtiene

$$I_1 = x e^{\sen x} - \int e^{\sen x} dx$$

En I_2 , haciendo $\begin{cases} u = e^{\sen x} \Rightarrow du = e^{\sen x} \cos x \, dx \\ dv = \frac{\sen x}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$ resulta

$$I_2 = \frac{e^{\sen x}}{\cos x} - \int e^{\sen x} dx = e^{\sen x} \sec x - \int e^{\sen x} dx$$

Por tanto, $I = x e^{\sen x} - e^{\sen x} \sec x + C$.

EJERCICIOS

Calcule las siguientes integrales indefinidas.

1. $\int x^2 \ln x \, dx$ $R. \frac{x^3}{9}(3 \ln x - 1) + C$
2. $\int (7 + x - 3x^2)e^{-x} \, dx$ $R. (3x^2 + 5x - 2)e^{-x} + C$
3. $\int x \sec^2 x \, dx$ $R. x \tan x + \ln|\cos x| + C$
4. $\int \arcsen(2x) \, dx$ $R. x \arcsen 2x + \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + C$
5. $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$ $R. -\frac{1+2 \ln x}{4x^2} + C$
6. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$ $R. x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$
7. $\int \cos(\ln x) \, dx$ $R. \frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C$
8. $\int \sin(\ln x) \, dx$ $R. \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$
9. $\int x \arctan^2 x \, dx$ $R. \frac{1}{2}[(x^2 + 1)\arctan^2 x - 2x \arctan x + \ln(x^2 + 1)] + C$
10. $\int \arcsen^2 x \, dx$ $R. x \arcsen^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsen x - 2x + C$
11. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx$ $R. \ln x |\ln(\ln x) - 1| + C$
12. $\int x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \, dx$ $R. \frac{x^2+1}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - x + C$
13. $\int \frac{x^2 \, dx}{(x \cos x - \sin x)^2}$ $R. \frac{x}{\sin x (\cos x - \sin x)} - \cot x + C$
14. $\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2} \, dx$ $R. \frac{2x e^x}{x+1} - e^x + C$

15. $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$ $R. -\frac{x e^x}{1+x} + e^x + C$
16. $\int x \arctan \sqrt{x^2 - 1} dx$ $R. \frac{1}{2} x^2 \arctan \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1} + C$
17. $\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$ $R. \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$
18. $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$ $R. -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \ln \sqrt{1+x^2} + C$
19. $\int \csc^5 x dx$ $R. \frac{1}{4} \left[-\csc^3 x \cot x - \frac{3}{2} (\csc x \cot x + \ln|\csc x + \cot x|) \right] + C$
20. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) dx$ $R. \sqrt{1-x^2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + 2 \operatorname{arcsen} x + C$
21. $\int e^{2x} \cos(e^x) dx$ $R. e^x \operatorname{sen}(e^x) + \cos(e^x) + C$
22. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx$ $R. \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \operatorname{sen} bx - b \cos bx] + C$
23. $\int \arctan(\sqrt{x+1}) dx$ $R. (x+2) \arctan \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} + C$
24. $\int \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) dx$ $R. \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) - \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + x} + C$
25. $\int \operatorname{sen}^2(\ln x) dx$ $R. x \operatorname{sen}^2(\ln x) - \frac{1}{5} [x \operatorname{sen}(2 \ln x) - 2x \cos(2 \ln x)] + C$
26. $\int \frac{(e^{\operatorname{sen} x} \cos^4 x - 1)}{\cos^3 x} dx$ $R. e^{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{2} [\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|] + C$
27. $\int \frac{(x^2 - \operatorname{sen}^2 x)}{x - \operatorname{sen} x \cos x + x \cos x - \operatorname{sen} x} dx$ $R. x(\csc x - \cot x) + C$
28. $\int (\arccos x - \ln x) dx$ $R. x \arccos x - \sqrt{1-x^2} - x(\ln x - 1) + C$

29. Si $f''(x) = -a f(x)$ y $g''(x) = b g(x)$, donde a y b son constantes, hallar la integral:

$$\int f(x)g''(x) dx$$

$$R. \frac{b}{a+b} [f(x)g'(x) - f'(x)g(x)] + C$$

30. $\int 4x^3 \arcsen \frac{1}{x} dx$

$$R. x^4 \arcsen \frac{1}{x} + \left(\frac{x^2 + 2}{3} \right) \sqrt{x^2 - 1} + C$$

31. $\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^4} dx$

32. $\int \frac{x^4 - x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$

33. $\int \frac{\arcsen \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

34. $\int \cos^2 x e^x dx$

35. $\int \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$

36. $\int x e^x \cos x dx$

37. $\int \frac{x^2 \sec^2 x}{(\tan x - x \sec^2 x)^2} dx$

38. $\int x \arctan \sqrt{x^2 - 1} dx$

39. $\int \frac{\arcsen \frac{1}{x}}{x^5} dx$

40. $\int \frac{\cosh^2 x dx}{(x \sinh x - \cosh x)^2}$

41. $\int \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$

42. $\int \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$

43. $\int \sinh^{-1} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$

44. $\int \frac{(x \sin x + \cos x)(x^2 - \cos^2 x)}{x^2 \cos^2 x} dx$

45. $\int \frac{(e^{2x} - x^2)(x-1)}{x^2 e^x} dx$

46. $\int \cosh 3x \cos 2x dx$

47. $\int \frac{x \cos x - \sen x + 1}{(x + \cos x)^2} dx$

48. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx$

49. $\int \frac{a \ln(x+a+\sqrt{x^2+2ax})}{(x+a)^2} dx$

50. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} [\ln(1+x)^x - \ln(1-x)^x] dx$

1.5 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

1.5.1 Integrales de algunas funciones que contienen un trinomio cuadrado de la forma:

$$\text{I. } \int \frac{dx}{px^2 + qx + r}$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

$$\text{III. } \int \frac{(ax + b)dx}{px^2 + qx + r}$$

$$\text{IV. } \int \frac{(ax + b)dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

En los casos (I) y (II), es suficiente completar cuadrados en el trinomio y aplicar las fórmulas que correspondan: (23), (24), (25) ó (26).

En los casos (III) y (IV) se usa el siguiente artificio:

$$ax + b = \frac{a}{2p}(2px + q) - \frac{aq}{2p} + b$$

La expresión $2px + q$ es la derivada del trinomio cuadrado. Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{(ax + b)dx}{px^2 + qx + r} &= \frac{a}{2p} \int \frac{(2px + q)dx}{px^2 + qx + r} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right) \underbrace{\int \frac{dx}{px^2 + qx + r}}_A \\ &= \frac{a}{2p} \ln|px^2 + qx + r| + \left(b - \frac{aq}{2p}\right) A \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int \frac{(ax + b)dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}} &= \frac{a}{2p} \int \frac{(2px + q)dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right) \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}}_B \\ &= \frac{a}{p} \sqrt{px^2 + qx + r} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right) B \end{aligned}$$

Las integrales (A) y (B) son de los casos I y II, respectivamente.

Ejemplo 37. Calcule las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{3 dx}{4x^2 + 4x - 3}$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}$$

$$\text{c) } \int \frac{2 dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 18}}$$

$$\text{d) } \int \frac{5 dx}{\sqrt{-x^2 - 8x - 12}}$$

Solución

Completando el cuadrado en cada trinomio y aplicando las fórmulas de integración, tenemos

$$a) \int \frac{3 dx}{4x^2 + 4x - 3} = \frac{3}{2} \int \frac{2 dx}{(2x+1)^2 - 4} = \frac{3}{8} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+3} \right| + C$$

$$b) \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 9} = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x-1}{3} \right) + C$$

$$c) \int \frac{2 dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 18}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2 + 9}} = 2 \ln \left[x+3 + \sqrt{x^2 + 6x + 18} \right] + C$$

$$d) \int \frac{5 dx}{\sqrt{-x^2 - 8x - 12}} = 5 \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x+4)^2}} = 5 \arcsen \left(\frac{x+4}{2} \right) + C$$

Ejemplo 38. Calcule las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{(3x-5)dx}{x^2 + 6x + 18}$$

$$b) \int \frac{(1-4x)dx}{\sqrt{9x^2 + 6x - 3}}$$

$$c) \int \frac{2-x}{\sqrt{x^2 + 10x + 21}} dx$$

$$d) \int \frac{(4+5x)dx}{x(x+3)}$$

Solución

Completando cuadrado en cada trinomio y usando el artificio indicado, se tiene

$$a) 3x - 5 = \frac{3}{2}(2x + 6) - 9 - 5 = \frac{3}{2}(2x + 6) - 14. \text{ Entonces}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x-5)dx}{x^2 + 6x + 18} &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+6)dx}{x^2 + 6x + 18} - 14 \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 9} \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2 + 6x + 18) - \frac{14}{3} \arctan \left(\frac{x+3}{3} \right) + C \end{aligned}$$

$$b) 1 - 4x = -\frac{4}{18}(18x + 6) + 1 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{9}(18x + 6) + \frac{7}{3}. \text{ Luego,}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-4x)dx}{\sqrt{9x^2 + 6x - 3}} &= -\frac{2}{9} \int \frac{(18x+6)dx}{\sqrt{9x^2 + 6x - 3}} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3} \int \frac{3 dx}{\sqrt{(3x+1)^2 - 4}} \\ &= -\frac{4}{9} \sqrt{9x^2 + 6x - 3} + \frac{7}{9} \ln |3x+1 + \sqrt{9x^2 + 6x - 3}| + C \end{aligned}$$

$$c) 2 - x = -\frac{1}{2}(2x + 10) + 2 + 5 = -\frac{1}{2}(2x + 10) + 7. \text{ Entonces}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(2-x)dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 21}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{(2x+10)dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 21}} + 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+5)^2 - 4}} \\ &= -\sqrt{x^2 + 10x + 21} + 7 \ln |x+5 + \sqrt{x^2 + 10x + 21}| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \int \frac{(4+5x)}{x(x+3)} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx - \frac{7}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} \\
 &= \frac{5}{2} \ln|x^2+3x| - \frac{7}{6} \ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C
 \end{aligned}$$

Ejemplo 39. Calcule las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}
 a) \int \frac{(3e^{2x} - 4e^x)}{\sqrt{4e^x - e^x - 3}} dx & \quad b) \int \frac{(\sinh x + 3 \cosh x)}{\cosh x(6 \sinh^2 x + \sinh 2x + 5)} dx
 \end{aligned}$$

Solución

$$a) I = \int \frac{(3e^{2x} - 4e^x)}{\sqrt{4e^x - e^x - 3}} dx = \int \frac{(3e^x - 4)e^x dx}{\sqrt{4e^x - e^{2x} - 3}}$$

Si se hace $t = e^x$, entonces $dt = e^x dx$. Luego,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{(3t - 4)dt}{\sqrt{4t - t^2 - 3}} = -\frac{3}{2} \int \frac{(4 - 2t)dt}{\sqrt{4t - t^2 - 3}} + 2 \int \frac{dt}{\sqrt{1 - (t - 2)^2}} \\
 &= -3\sqrt{4t - t^2 - 3} + 2 \arcsen(t - 2) + C \\
 &= -3\sqrt{4e^x - e^{2x} - 3} + 2 \arcsen(e^x - 2) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) J &= \int \frac{(\sinh x + 3 \cosh x) dx}{\cosh x(6 \sinh^2 x + \sinh 2x + 5)} \\
 &= \int \frac{(\sinh x + 3 \cosh x) dx}{\cosh x(6 \sinh^2 x + 2 \sinh x \cosh x + 5)}
 \end{aligned}$$

Dividiendo numerador y denominador entre $\cosh^3 x$, se tiene

$$\begin{aligned}
 J &= \int \frac{(\tanh x + 3) \operatorname{sech}^2 x dx}{6 \tanh^2 x + 2 \tanh x + 5 \operatorname{sech}^2 x} \\
 &= \int \frac{(\tanh x + 3) \operatorname{sech}^2 x dx}{6 \tanh^2 x + 2 \tanh x + 5(1 - \tanh^2 x)}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, si $t = \tanh x$, entonces $dt = \operatorname{sech}^2 x dx$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 J &= \int \frac{(t + 3)dt}{t^2 + 2t + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{(2t + 2)dt}{t^2 + 2t + 5} + 2 \int \frac{dt}{(t + 1)^2 + 4} \\
 &= \frac{1}{2} \ln|\tanh^2 x + 2 \tanh x + 5| + \arctan\left(\frac{\tanh x + 1}{2}\right) + C
 \end{aligned}$$

1.5.2 INTEGRALES DE ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS

Recordemos las siguientes identidades:

$$1. \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$2. \sec^2 u - \tan^2 u = 1$$

$$3. \csc^2 u - \cot^2 u = 1$$

$$4. \sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$5. \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$6. \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

$$7. \operatorname{sech}^2 u + \tanh^2 u = 1$$

$$8. \coth^2 u - \operatorname{csch}^2 u = 1$$

$$9. \sinh^2 u = \frac{\cosh 2u - 1}{2}$$

$$10. \cosh^2 u = \frac{\cosh 2u + 1}{2}$$

Estas identidades son muy importantes en los artificios para resolver ciertos tipos de integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas.

1. INTEGRALES DE LA FORMA: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ y $\int \sinh^m x \cosh^n x \, dx$.

Se consideran 2 casos:

CASO 1: Uno de los exponentes m ó n es un entero impar positivo.

- i) Si m es impar positivo, se factoriza $\sin x \, dx$ (o $\sinh x \, dx$) y se expresa los senos (o senos hiperbólicos) restantes en función de cosenos (o cosenos hiperbólicos) usando la identidad

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad (\text{ó } \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1)$$

- ii) Si n es impar positivo, se procede de manera similar, es decir, se factoriza $\cos x \, dx$ (ó $\cosh x \, dx$) y se expresa los cosenos (ó cosenos hiperbólicos) restantes en función de senos (o senos hiperbólicos) usando la identidad.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad (\text{o } \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x)$$

Ejemplo 40. Calcule las integrales

$$a) \int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$$

$$b) \int \sinh^5 x \sqrt{\cosh x} \, dx$$

Solución

$$\begin{aligned} a) \quad I &= \int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^4 x (\sin x \, dx) \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x (\sin x \, dx) \end{aligned}$$

En la última integral, hacemos $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$. Así, se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int (1 - u^2)u^4 (-du) = -\int (u^4 - u^6)du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C \\ &= \frac{\cos^5 x}{35} (5 \cos^2 x - 7) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \sinh^5 x \sqrt{\cosh x} \, dx &= \int (\cosh^2 x - 1)^2 (\cosh x)^{1/2} (\sinh x \, dx) \\ &= \int (\cosh^{9/2} x - 2 \cosh^{5/2} x + \cosh^{1/2} x) (\sinh x \, dx) \\ &= \frac{2}{11} \cosh^{11/2} x - \frac{4}{7} \cosh^{7/2} x + \frac{2}{3} \cosh^{3/2} x + C \end{aligned}$$

CASO 2: Ambos exponentes m y n son pares y mayores o iguales a cero.

En este caso, se usan las identidades:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \left(\text{ó } \sinh^2 x &= \frac{\cosh 2x - 1}{2} \quad \text{y} \quad \cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2} \right) \end{aligned}$$

Al efectuar las operaciones, se obtienen términos que contienen potencias pares e impares de $\cos 2x$ (ó $\cosh 2x$). Los términos que tienen las potencias impares se integran teniendo en cuenta el caso 1. Los términos que tienen las potencias pares se reducen de nuevo usando sucesivamente las identidades indicadas.

Ejemplo 41. Calcule las integrales:

$$\text{a) } \int \sinh^4 3x \, dx$$

$$\text{b) } \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \sinh^4 3x \, dx &= \int \left(\frac{\cosh 6x - 1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (\cosh^2 6x - 2 \cosh 6x + 1) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{\cosh(12x) + 1}{2} - 2 \cosh 6x + 1 \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (\cosh 12x - 4 \cosh 6x + 3) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{12} \sinh 12x - \frac{2}{3} \sinh 6x + 3x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\
 &= \frac{1}{8} \int \left(1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx - \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x)(\cos 2x \, dx) \\
 &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{2} + \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx - \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x)(2 \cos 2x \, dx) \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x \right) - \frac{1}{16} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x \right) + C \\
 &= \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin^3 2x}{3} \right) + C
 \end{aligned}$$

II. INTEGRALES DE LA FORMA: $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$, $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$,
 $\int \tanh^m x \operatorname{sech}^n x \, dx$ y $\int \coth^m x \operatorname{csch}^n x \, dx$.

Se consideran 2 casos: m entero positivo impar y n entero positivo par.

CASO 1. Si m es un entero impar positivo, se factoriza $\tan x \sec x \, dx$ (ó $\cot x \csc x \, dx$ ó $\tanh x \operatorname{sech} x \, dx$ ó $\coth x \operatorname{csch} x \, dx$) y se expresa las tangentes (ó cotangentes ó tangentes hiperbólicas ó cotangentes hiperbólicas) restantes en términos de $\sec x$ (ó $\csc x$ ó $\operatorname{sech} x$ ó $\operatorname{csch} x$) mediante la identidad: $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$ (ó $\cot^2 u = \csc^2 u - 1$ ó $\tanh^2 u = 1 - \operatorname{sech}^2 u$ ó $\coth^2 u = 1 + \operatorname{csch}^2 u$).

Ejemplo 42. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\tan^3 x}{\sec^4 x} dx$

b) $\int \cot^5 x \, dx$

c) $\int \tanh^3 x \sqrt{\operatorname{sech} x} \, dx$

d) $\int \coth^5 x \operatorname{csch}^3 x \, dx$

Solución

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \frac{\tan^3 x}{\sec^4 x} dx &= \int \frac{\tan^2 x}{\sec^5 x} (\tan x \sec x \, dx) = \int \frac{\sec^2 x - 1}{\sec^5 x} (\tan x \sec x \, dx) \\
 &= \int (\sec^{-3} x - \sec^{-5} x) (\tan x \sec x \, dx)
 \end{aligned}$$

(si $u = \sec x$, $du = \sec x \tan x \, dx$)

$$= -\frac{1}{2} \sec^{-2} x + \frac{1}{4} \sec^{-4} x + C = \frac{1}{4} \cos^2 x (\cos^2 x - 2) + C$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \cot^5 x \, dx &= \int \frac{\cot^4 x}{\csc x} (\cot x \csc x \, dx) \\
 &= \int \frac{(\csc^2 x - 1)^2}{\csc x} (\cot x \csc x \, dx) \\
 &= - \int \left(\csc^3 x - 2 \csc x + \frac{1}{\csc x} \right) (-\cot x \csc x \, dx) \\
 &= - \left(\frac{\csc^4 x}{4} - \csc^2 x + \ln |\csc x| \right) + k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \tanh^3 x \sqrt{\operatorname{sech} x} \, dx &= \int \frac{\tanh^2 x}{\sqrt{\operatorname{sech} x}} (\tanh x \operatorname{sech} x \, dx) \\
 &= \int \frac{1 - \operatorname{sech}^2 x}{\sqrt{\operatorname{sech} x}} (\tanh x \operatorname{sech} x \, dx) \\
 &= - \int (\operatorname{sech}^{-1/2} x - \operatorname{sech}^{3/2} x) (-\tanh x \operatorname{sech} x \, dx) \\
 &= - \left(2\sqrt{\operatorname{sech} x} - \frac{2}{5} \operatorname{sech}^{5/2} x \right) + C \\
 &= \frac{\sqrt{\operatorname{sech} x}}{5} (2 \operatorname{sech}^2 x - 10) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int \coth^5 x \operatorname{csch}^3 x \, dx &= \int \coth^4 x \operatorname{csch}^2 x (\coth x \operatorname{csch} x \, dx) \\
 &= \int (1 + \operatorname{csch}^2 x)^2 \operatorname{csch} x (\coth x \operatorname{csch} x \, dx) \\
 &= - \int (\operatorname{csch} x + 2 \operatorname{csch}^3 x + \operatorname{csch}^5 x) (-\coth x \operatorname{csch} x \, dx) \\
 &= - \left(\frac{1}{2} \operatorname{csch}^2 x + \frac{1}{2} \operatorname{csch}^4 x + \frac{1}{6} \operatorname{csch}^6 x \right) + C
 \end{aligned}$$

CASO 2. Si n es un entero par positivo, se factoriza $\sec^2 x \, dx$ (ó $\csc^2 x \, dx$ ó $\operatorname{sech}^2 x \, dx$ ó $\operatorname{csch}^2 x \, dx$) y el resto de las secantes (ó cosecantes ó secantes hiperbólicas ó cosecantes hiperbólicas) se transforman en términos de $\tan x$ (ó $\cot x$ ó $\tanh x$ ó $\coth x$) usando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ (ó $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ ó $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ ó $\operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$).

Ejemplo 43. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \tan^{3/2} x \sec^4 x \, dx$

b) $\int \csc^4 x \, dx$

c) $\int \tanh^2 x \operatorname{sech}^4 x \, dx$

d) $\int \operatorname{csch}^6 x \, dx$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \tan^{3/2} x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^{3/2} x \sec^2 x (\sec^2 x \, dx) \\ &= \int \tan^{3/2} x (1 + \tan^2 x) (\sec^2 x \, dx) \\ &= \int (\tan^{3/2} x + \tan^{7/2} x) (\sec^2 x \, dx) \end{aligned}$$

(si $t = \tan x$, $dt = \sec^2 x \, dx$)

$$= \frac{2}{5} \tan^{5/2} x + \frac{2}{9} \tan^{7/2} x + C$$

$$\text{b) } \int \csc^4 x \, dx = \int \csc^2 x (\csc^2 x \, dx) = - \int (1 + \cot^2 x) (-\csc^2 x \, dx)$$

(si $t = \cot x$, $dt = -\csc^2 x \, dx$)

$$= - \left(\cot x + \frac{1}{3} \cot^3 x \right) + C$$

$$\text{c) } \int \tanh^2 x \operatorname{sech}^4 x \, dx = \int \tanh^2 x (1 - \tanh^2 x) (\operatorname{sech}^2 x \, dx)$$

$$= \int (\tanh^2 x - \tanh^4 x) (\operatorname{sech}^2 x \, dx)$$

$$= \frac{1}{3} \tanh^3 x - \frac{1}{5} \tanh^5 x + C$$

$$\text{d) } \int \operatorname{csch}^6 x \, dx = \int (\coth^2 x - 1)^2 (\operatorname{csch}^2 x \, dx)$$

$$= - \int (\coth^4 x - 2 \coth^2 x + 1) (-\operatorname{csch}^2 x \, dx)$$

$$= - \left(\frac{1}{5} \coth^5 x - \frac{2}{3} \coth^3 x + \coth x \right) + C$$

III. INTEGRALES DE LA FORMA:

$$\int \sin(mx) \cos(nx) dx, \int \sin(mx) \sin(nx) dx, \int \cos(mx) \cos(nx) dx, \\ \int \sinh(mx) \cosh(nx) dx, \int \sinh(mx) \sinh(nx) dx \quad y \\ \int \cosh(mx) \cosh(nx) dx.$$

Para calcular estas integrales se usan las fórmulas:

$$a) \sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

$$b) \sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$c) \cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

$$d) \sinh(mx) \cosh(nx) = \frac{1}{2} [\sinh(m+n)x + \sinh(m-n)x]$$

$$e) \sinh(mx) \sinh(nx) = \frac{1}{2} [\cosh(m+n)x - \cosh(m-n)x]$$

$$f) \cosh(mx) \cosh(nx) = \frac{1}{2} [\cosh(m+n)x + \cosh(m-n)x]$$

Ejemplo 44. Calcule las siguientes integrales:

$$a) \int \sin 2x \cos 3x dx$$

$$b) \int \cos 3x \cos 4x dx$$

$$c) \int \sinh 3x \sinh 4x dx$$

$$d) \int \cosh 4x \sinh x dx$$

Solución

$$a) \int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int [\sin(2-3)x + \sin(2+3)x] dx \\ = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 5x}{5} + \cos x \right) + C$$

$$b) \int \cos 3x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int [\cos(-x) + \cos 7x] dx = \frac{1}{2} \left(\sin x + \frac{1}{7} \sin 7x \right) + C$$

$$c) \int \sinh 3x \sinh 4x dx = \frac{1}{2} \int [\cosh 7x - \cosh x] dx \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \sinh 7x - \sinh x \right) + C$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \cosh 4x \sinh x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sinh 5x - \sinh 3x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \cosh 5x - \frac{1}{3} \cosh 3x \right) + C \end{aligned}$$

En este ejemplo, se han usado las identidades:

$$\sinh(-u) = -\sinh u, \quad \sin(-u) = -\sin u$$

$$\cosh(-u) = \cosh u, \quad \cos(-u) = \cos u$$

Ejemplo 45. Calcule las integrales:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \sin^3(3x) \tan 3x \, dx & \text{b) } \int \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx \\ \text{c) } \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^7(2x) \cos x}} dx & \text{d) } \int \cos^3 x \sin 3x \, dx \end{array}$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \int \sin^3(3x) \tan 3x \, dx = \int \frac{\sin^4 3x}{\cos 3x} dx \\ &= \int \frac{(1 - \cos^2 3x)^2}{\cos 3x} dx \\ &= \int (\sec 3x - 2 \cos 3x + \cos^3 3x) dx \\ &= \frac{1}{3} \ln |\sec 3x + \tan 3x| - \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{1}{3} \int (1 - \sin^2 3x)(3 \cos 3x \, dx) \\ &= \frac{1}{3} \ln |\sec 3x + \tan 3x| - \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{1}{3} \left(\sin 3x - \frac{1}{3} \sin^3 3x \right) + C \\ &= \frac{1}{3} \ln |\sec 3x + \tan 3x| - \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{9} \sin^3 3x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx &= \int \frac{\frac{1}{4}(2 + 2 \cos^2 2x)}{-\cos 2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int (\sec 2x + \cos 2x) dx \\ &= -\frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \tan 2x| - \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

$$c) I = \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^7(2x) \cos x}} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2^7}} \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^7 x \cos^8 x}}$$

Se observa que esta integral no se adapta a ninguno de los tipos estudiados en (I). Cuando se presentan estos casos, a veces, es conveniente transformar a los otros casos, es decir, a productos de tangentes y secantes ó cotangentes y cosecantes. En este ejemplo, transformando a tangentes y secantes (dividiendo entre $\cos^5 x$, numerador y denominador) se obtiene:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt[3]{128}} \int \frac{\sec^4 x}{\tan^{7/3} x} dx = \frac{1}{4\sqrt[3]{2}} \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^{7/3} x} (\sec^2 x dx) \\ &= \frac{1}{4\sqrt[3]{2}} \int (\tan^{-7/3} x + \tan^{-1/3} x) \sec^2 x dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt[3]{2}} \left(-\frac{3}{4} \cot^{4/3} x + \frac{3}{2} \tan^{2/3} x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) J &= \int \cos^3 2x \sin 3x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \cos 2x \sin 3x dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x \sin 3x) dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x (\cos 2x \sin 3x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int [\sin x + \sin 5x] dx + \frac{1}{4} \int [\cos 4x \sin x + \cos 4x \sin 5x] dx \\ &= \frac{1}{4} \left[-\cos x - \frac{1}{5} \cos 5x \right] + \frac{1}{8} \int [-\sin 3x + \sin 5x + \sin x + \sin 9x] dx \\ &= \frac{1}{4} \left(-\cos x - \frac{1}{5} \cos 5x \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{5} \cos 5x - \cos x - \frac{1}{9} \cos 9x \right) + C \\ &= -\frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{24} \cos 3x - \frac{3}{40} \cos 5x - \frac{1}{72} \cos 9x + C \end{aligned}$$

Ejemplo 46. Calcule las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} a) \int \tanh^4 2x dx & b) \int \operatorname{sech}^3 x dx & c) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx \\ d) \int \frac{\sin^4 3x}{\cos^3 3x} dx & e) \int \tan^2 x \sec x dx & \end{array}$$

Solución

Se observa que ninguna de las integrales se adaptan a los casos estudiados, por lo que será necesario efectuar algunas transformaciones. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \tanh^4 2x \, dx &= \int (1 - \operatorname{sech}^2 x)^2 \, dx = \int (1 - 2 \operatorname{sech}^2 2x + \operatorname{sech}^4 2x) \, dx \\
 &= x - \tanh 2x + \int (1 - \tanh^2 2x) \operatorname{sech}^2 x \, dx \\
 &= x - \tanh 2x + \frac{1}{2} \left(\tanh 2x - \frac{1}{3} \tanh^3 2x \right) + C \\
 &= x - \frac{1}{2} \tanh 2x - \frac{1}{6} \tanh^3 2x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \operatorname{sech}^3 x \, dx &= \int \sqrt{1 - \tanh^2 x} (\operatorname{sech}^2 x \, dx) \\
 (\text{Si } u = \tanh x, \, du &= \operatorname{sech}^2 x \, dx) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\tanh x \sqrt{1 - \tanh^2 x} + \arcsen(\tanh x) \right] + C \\
 &= \frac{1}{2} [\tanh x \operatorname{sech} x + \arcsen(\tanh x)] + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} \, dx &= \int \tan^2 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) (\sec^2 x \, dx) \\
 &= \int (\tan^2 x + \tan^4 x) (\sec^2 x \, dx) = \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int \frac{\sin^4 3x}{\cos^3 3x} \, dx &= \int \frac{(1 - \cos^2 3x)^2}{\cos^3 3x} \, dx = \int (\sec^3 3x - 2 \sec 3x + \cos 3x) \, dx \\
 &= \int \sqrt{1 + \tan^2 3x} \sec^2 3x \, dx - \underbrace{\frac{2}{3} \ln |\sec 3x + \tan 3x| + \frac{1}{3} \sin 3x}_A \\
 &= \frac{1}{6} [\tan 3x \sec 3x + \ln |\sec 3x + \tan 3x|] - A \\
 &= \frac{1}{6} \tan 3x \sec 3x - \frac{1}{2} \ln |\sec 3x + \tan 3x| + \frac{1}{3} \sin 3x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \int \tan^2 x \sec x \, dx &= \int \sqrt{\sec^2 x - 1} (\tan x \sec x \, dx) \\
 &= \frac{1}{2} [\sec x \tan x - \ln |\sec x + \tan x|] + C
 \end{aligned}$$

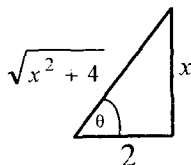
Ejemplo 47. Halle la integral $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$ usando la sustitución $x = 2 \tan \theta$.

Solución

Como $x = 2 \tan \theta$, $dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$. Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{8} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sec^2 \theta)^2} = \frac{1}{8} \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{(1 + \cos 2\theta)d\theta}{2} = \frac{1}{16} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right] + C = \frac{1}{16} [\theta + \sin \theta \cos \theta] + C \\ &= \frac{1}{16} \left(\arctan \frac{x}{2} + \frac{2x}{4 + x^2} \right) + C \end{aligned}$$

Para regresar a la variable original x , en vista de que $\tan \theta = \frac{x}{2}$, se construye el triángulo



A partir de este triángulo, se obtiene que

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

EJERCICIOS

Calcule las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int \sqrt{x^2 + 2x - 8} dx$

R. $\frac{1}{2} \left[(x+1)\sqrt{x^2 + 2x - 8} - 9 \ln |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x - 8}| \right] + C$

2. $\int \frac{9 dx}{\sqrt{9x^2 - 12x + 13}}$

R. $3 \ln \left[3x - 2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 13} \right] + C$

3. $\int \frac{3 dx}{4x^2 - 16x + 17}$

R. $\frac{3}{2} \arctan(2x - 4) + C$

4. $\int \frac{4 - 7x}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}} dx$

R. $-7\sqrt{x^2 + 2x - 8} + 11 \ln |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x - 8}| + C$

5. $\int \frac{3+5x}{9x^2-12x+13} dx$
 $R. \frac{5}{18} \ln(9x^2-12x+13) + \frac{19}{9} \arctan\left(\frac{3x-2}{3}\right) + C$
6. $\int \frac{(2-x)dx}{\sqrt{-x^2-10x-21}}$
 $R. \sqrt{-x^2-10x-21} + 7 \arcsen\left(\frac{x+5}{2}\right) + C$
7. $\int \frac{\sen 2x + 3 \cos x}{\sqrt{9+4 \sen x - \cos^2 x}} dx$
 $R. 2\sqrt{\sen^2 x + 4 \sen x + 8} - \ln|\sen x + 2 + \sqrt{\sen^2 x + 4 \sen x + 8}| + C$
8. $\int \frac{(5 \sinh x + 4 \cosh x) dx}{\cosh x(9 \sinh^2 x + 6 \sinh 2x + 5)}$
 $R. \frac{5}{8} \ln|4 \tanh^2 x + 12 \tanh x| - \frac{7}{16} \ln\left|\frac{2 \tanh x + 1}{2 \tanh x + 5}\right| + C$
9. $\int \sen^2 x dx$
 $R. \frac{x}{2} - \frac{\sen 2x}{4} + C$
10. $\int \cosh^2 5x dx$
 $R. \frac{x}{2} + \frac{1}{20} \sen(10x) + C$
11. $\int \sen^4 x dx$
 $R. \frac{3x}{8} - \frac{\sen 2x}{4} + \frac{\sen 4x}{32} + C$
12. $\int \cos^5 x dx$
 $R. \sen x - \frac{2}{3} \sen^3 x + \frac{1}{5} \sen^5 x + C$
13. $\int \cos^7 x \sen^3 x dx$
 $R. \frac{\cos^8 x}{40} (4 \cos^2 x - 5) + C$
14. $\int \frac{\sen^3 x}{\cos^4 x} dx$
 $R. \frac{1}{3 \cos^3 x} - \sec x + C$
15. $\int \sinh^3 x dx$
 $R. \frac{1}{3} \cosh x (\cosh^2 x - 3) + C$
16. $\int \sen^2(3x) \cos^4 3x dx$
 $R. \frac{x}{16} - \frac{\sen 12x}{192} + \frac{\sen^3 6x}{144} + C$
17. $\int \sinh^8 x \cosh^5 x dx$
 $R. \frac{1}{9} \sinh^9 x + \frac{2}{3} \sinh^3 x + \frac{1}{5} \sinh^5 x + C$
18. $\int \tan^6 x dx$
 $R. \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$

19. $\int \cot^5 x \, dx$ $R. -\frac{1}{4}\cot^4 x + \frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|\sen x| + C$
20. $\int \tanh^4 x \, dx$ $R. x - \tanh x - \frac{1}{3}\tanh^3 x + C$
21. $\int \sec^4 x \sqrt{\cot^3 x} \, dx$ $R. -2\sqrt{\cot x} + \frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x} + C$
22. $\int \tan^5 x \sqrt{\cos^3 x} \, dx$ $R. \frac{2}{5}\sec^{5/2} x - 4\sec^{1/2} x - \frac{2}{3}\cos^{3/2} x + C$
23. $\int \tanh^6 x \operatorname{sech}^4 x \, dx$ $R. \frac{1}{7}\tanh^7 x - \frac{1}{9}\tanh^9 x + C$
24. $\int \frac{\sqrt{2} \, dx}{\cos^3 x \sqrt{\sen 2x}}$ $R. \frac{2}{5}\sqrt{\tan x}(5 + \tan^2 x) + C$
25. $\int \sen 3x \sen 5x \, dx$ $R. \frac{\sen 2x}{4} - \frac{\sen 8x}{16} + C$
26. $\int \cos 2x \cos 7x \, dx$ $R. \frac{1}{10}\sen 5x + \frac{1}{18}\sen 9x + C$
27. $\int \sen^5 2x \cos^8 2x \, dx$ $R. \frac{1}{2}\sen^6(2x) - \frac{1}{2}\sen^8(2x) + C$
28. $\int \sen^3 x \cos^3 x \, dx$ $R. -\frac{1}{16}\cos(2x) + \frac{1}{48}\cos^3(2x) + C$
29. $\int (1 + \cos 4x)^{3/2} \, dx$ $R. \frac{\sqrt{2}}{2}\sen 2x - \frac{\sqrt{2}}{3}\sen^3 2x + C$
30. $\int \cot^4(3x) \, dx$ $R. -\frac{1}{9}\cot^3 3x + \frac{1}{3}\cot 3x + x + C$
31. $\int \sen^4 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \, dx$ $R. \frac{x}{16} - \frac{1}{32}\sen 2x - \frac{1}{24}\sen^3 x + C$
32. $\int \tan^3 x \, dx$ $R. \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$
33. $\int \tan^3(3x)\sec^3(3x) \, dx$ $R. \frac{1}{15}\sec^5 3x - \frac{1}{9}\sec^3 3x + C$
34. $\int \frac{\cos^3 x}{\sen^4 x} \, dx$ $R. \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$

35. $\int \frac{\sec^3 x}{\sqrt{\cos^4 x}} dx$ R. $\sqrt[3]{\sec x} \left(\frac{3}{5} \cos^2 x + 3 \right) + C$
36. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$ R. $2 \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x - \cot x + C$
37. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^5 x}$ R. $\frac{1}{2} \tan^2 x + 3 \ln |\tan x| - \frac{3}{2} \cot^2 x - \frac{1}{4} \cot^4 x + C$
38. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$ R. $2\sqrt{\tan x} + C$
39. $\int \frac{\sec^4 x}{\tan^4 x} dx$ R. $-\cot x - \frac{1}{3} \cot^3 x + C$
40. $\int \sqrt{\cot x \cos^9 x} dx$ R. $2\sqrt{\sin x} - \frac{4}{5} \sin^{5/2} x + \frac{2}{9} \sin^{9/2} x + C$
41. $\int \frac{\sin^2(\pi x)}{\cos^6(\pi x)} dx$ R. $\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} \tan^3(\pi x) + \frac{1}{5} \tan^5(\pi x) \right] + C$
42. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$ R. $\frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$
43. $\int \sin 4x \cos 5x dx$ R. $-\frac{\cos 9x}{18} + \frac{\cos x}{2} + C$
44. $\int \sin 8x \sin 3x dx$ R. $\frac{\sin 11x}{22} - \frac{\sin 5x}{10} + C$
45. $\int \cosh 3x \cosh x dx$ R. $\frac{1}{8} \sinh 4x + \frac{1}{4} \sinh 2x + C$
46. $\int \sinh 4x \sinh x dx$ R. $\frac{1}{10} \cosh 5x + \frac{1}{6} \cosh 3x + C$
47. $\int \sin^3 x \cos 3x dx$ R. $\frac{3}{16} \cos 2x - \frac{1}{32} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x + C$
48. $\int \cos^2 x \sin^2 4x dx$ R. $\frac{x}{4} - \frac{\sin 8x}{32} + \frac{\sin 2x}{8} - \frac{\sin 6x}{48} - \frac{\sin 10x}{80} + C$
49. $\int \sinh^2 x \cosh 5x dx$ R. $\frac{\sinh 7x}{28} + \frac{\sinh 3x}{12} - \frac{\sinh 5x}{10} + C$
50. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$ R. $-2\sqrt{\cot x} + \frac{2}{3} \tan x \sqrt{\tan x} + C$

1.5.3 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Las integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{px^2 + qx + r})dx$, donde R es una función racional de las variables x y $\sqrt{px^2 + qx + r}$, se puede simplificar por medio de una sustitución trigonométrica adecuada.

Completando el cuadrado en el trinomio $px^2 + qx + r$ se obtiene una expresión de la forma $u^2 + a^2$ ó $u^2 - a^2$ ó $a^2 - u^2$, donde a es una constante.

I) Si el trinomio tiene la forma $a^2 - u^2$, mediante la sustitución

$$u = a \sin \theta, \quad a > 0$$

se elimina el radical, pues $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$. También se tiene que

$$du = a \cos \theta d\theta$$

Para regresar a la variable original u , se emplea el triángulo formado con la sustitución $\sin \theta = \frac{u}{a}$ (Fig. 1.3 a).

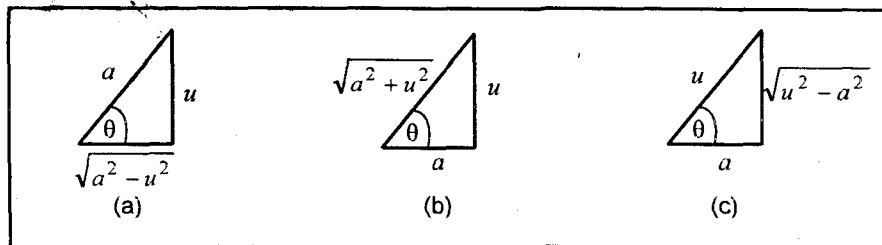


Fig. 1.3

II) Si el trinomio tiene la forma $a^2 + u^2$, mediante la sustitución

$$u = a \tan \theta, \quad a > 0$$

se elimina el radical, pues $\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$. También se tiene que

$$du = \sec^2 \theta d\theta$$

Para regresar a la variable original u , se utiliza el triángulo formado con la sustitución $\tan \theta = \frac{u}{a}$ (Fig. 1.3 b).

III) Si el trinomio tiene la forma $u^2 - a^2$, mediante la sustitución

$$u = a \sec \theta, \quad a > 0$$

se elimina el radical, pues $\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan \theta$. También se tiene

$$du = a \sec \theta \tan \theta d\theta$$

Para expresar la integral original en términos de su variable u , se emplea el triángulo elaborado con $\sec \theta = \frac{u}{a}$ (Fig. 1.3 c).

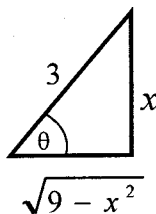
Ejemplo 48. Calcule $I = \int \sqrt{9 - x^2} dx$.

Solución

Haciendo la sustitución $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, $dx = 3 \cos \theta d\theta$ y calculando la integral trigonométrica que resulta, se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{3^2 - x^2} dx = \int \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 \theta} 3 \cos \theta d\theta = \int \sqrt{9 \cos^2 \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta \\ &= \int 9 \cos^2 \theta d\theta = \frac{9}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{9}{2} (\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + C = \frac{9}{2} \left(\operatorname{arcsen} \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{9} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{9 - x^2} + 9 \operatorname{arcsen} \frac{x}{3} \right) + C \end{aligned}$$

Sust. $x = 3 \operatorname{sen} \theta$



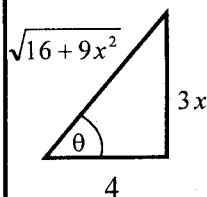
Ejemplo 49. Calcule $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16 + 9x^2}}$.

Solución

Sea $3x = 4 \tan \theta$, $dx = \frac{4}{3} \sec^2 \theta d\theta$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16 + 9x^2}} = \frac{4}{3} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\frac{16}{9} \tan^2 \theta \sqrt{16 + 16 \tan^2 \theta}} \\ &= \frac{3}{16} \int \frac{\sec \theta}{\tan^2 \theta} d\theta = \frac{3}{16} \int \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = -\frac{3}{16} \csc \theta + C \\ &= -\frac{3}{16} \cdot \frac{\sqrt{16 + 9x^2}}{3x} + C = -\frac{\sqrt{16 + 9x^2}}{16x} + C \end{aligned}$$

Sust. $3x = 4 \tan \theta$



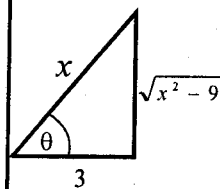
Ejemplo 50. Calcule $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$.

Solución

Haciendo $x = 3 \sec \theta$, $dx = 3 \sec \theta \tan \theta d\theta$, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}} dx = \int \frac{27 \sec^3 \theta \cdot 3 \sec \theta \tan \theta d\theta}{\sqrt{9 \sec^2 \theta - 9}} \\ &= 27 \int (1 + \tan^2 \theta) \sec^2 \theta d\theta = 27 \left(\tan \theta + \frac{1}{3} \tan^3 \theta \right) + C \\ &= 9\sqrt{x^2 - 9} + \frac{1}{3} (x^2 - 9)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Sust. $x = 3 \sec \theta$



Ejemplo 51. Halle $I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$.

Solución

Completando el cuadrado en el trinomio y haciendo la sustitución

$$x + 1 = 2 \tan \theta, \quad dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$$

se obtiene

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}}$$

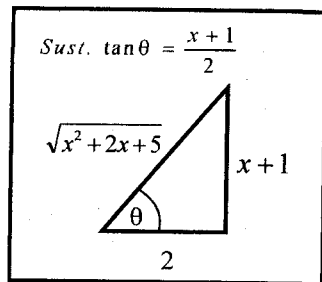
$$\int \frac{(2 \tan \theta - 1)^3 2 \sec^2 \theta d\theta}{2 \sec \theta} = \int (2 \tan \theta - 1)^3 \sec \theta d\theta$$

$$\int (8 \tan^3 \theta \sec \theta - 12 \tan^2 \theta \sec \theta + 6 \tan \theta \sec \theta - \sec \theta) d\theta$$

$$\frac{8}{3} \sec^3 \theta - 6 \sec \theta \tan \theta + 5 \ln |\sec \theta + \tan \theta| - 2 \sec \theta + C$$

$$\frac{1}{3} (x^2 + 2x + 5)^{3/2} - \frac{3}{2} (x+1) \sqrt{x^2 + 2x + 5} + 5 \ln |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| - \sqrt{x^2 + 2x + 5} + C$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} \left(\frac{2x^2 - 5x - 5}{6} \right) + 5 \ln |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + C$$



Ejemplo 52. Halle $I = \int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4-x^2}}$.

Solución

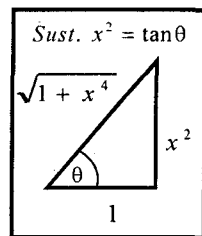
Si se hace $x^2 = \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{\sec^2 \theta}{2\sqrt{\tan \theta}} d\theta$.

Entonces

$$I = \int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4-x^2}} = \int \frac{\frac{\sec^2 \theta d\theta}{2\sqrt{\tan \theta}}}{\sec^2 \theta \sqrt{\sec \theta - \tan \theta}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\sec \theta - \tan \theta}} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \arcsen \left(\frac{\sin \theta - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \arcsen(2 \sin \theta - 1) + C = \frac{1}{2} \arcsen \left(\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^4}} - 1 \right) + C$$



Ejemplo 53. Calcule $I = \int \frac{12 dx}{(2x-1)\sqrt{(4x^2-4x-8)^3}}$.

Solución

Completando el cuadrado en el trinomio y haciendo la sustitución

$$2x - 1 = 3 \sec \theta, \quad dx = \frac{3}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta$$

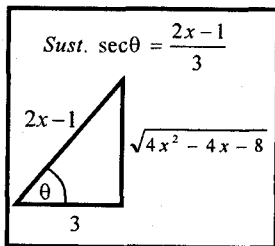
Resulta

$$I = \int \frac{12 dx}{(2x-1)\sqrt{(4x^2-4x-8)^3}}$$

$$= \int \frac{12 dx}{(2x-1)[(2x-1)^2-9]^{3/2}}$$

$$= \int \frac{18 \sec \theta \tan \theta d\theta}{3 \sec \theta 27 \tan^3 \theta} = \frac{2}{9} \int \cot^2 \theta d\theta = \frac{2}{9} \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta$$

$$= \frac{2}{9} [-\cot \theta - \theta] + C = -\frac{2}{9} \left(\frac{3}{\sqrt{4x^2-4x-8}} + \arcsen \frac{2x-1}{3} \right) + C$$



Ejemplo 54. Calcule $I = \int \frac{e^{-x} dx}{(9e^{-2x} + 1)^{3/2}}$.

Solución

Si se sustituye

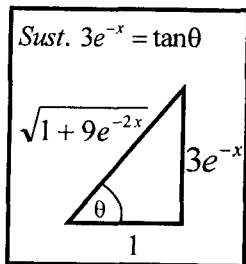
$3e^{-x} = \tan \theta$, $e^{-x} dx = -\frac{1}{3} \sec^2 \theta d\theta$, se tiene

$$I = \int \frac{e^{-x} dx}{[(3e^{-x})^2 + 1]^{3/2}}$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{3} \sec^2 \theta d\theta}{\sec^3 \theta} = -\frac{1}{3} \int \cos \theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \sin \theta + C$$

$$= -\frac{e^{-x}}{\sqrt{1+9e^{-2x}}} + C$$



Ejemplo 55. Calcule $I = \int \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}} dx$

Solución

Racionalizando el integrando, obtenemos

$$I = \int \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}} dx = \int \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x}\sqrt{2-x}} dx = \int \frac{x(1-x)dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

Ahora bien, completando el cuadrado en el trinomio y haciendo la sustitución

$$x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \sec \theta, \quad dx = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta$$

se obtiene

$$I = \int \frac{x(1-x)dx}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}}$$

$$= \int \frac{\left(\frac{1}{2} \sec \theta + \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sec \theta\right) \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta}{\frac{1}{2} \tan \theta}$$

$$= -\frac{1}{4} \int (\sec^3 \theta + 4 \sec^2 \theta + 3 \sec \theta) d\theta$$

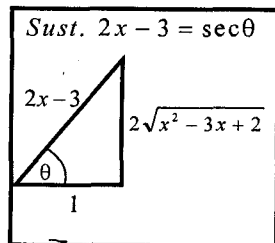
$$= -\tan \theta - \frac{3}{4} \ln |\sec \theta + \tan \theta| - \frac{1}{4} \int \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= -\tan \theta - \frac{3}{4} \ln |\sec \theta + \tan \theta| - \frac{1}{8} (\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|) + C$$

$$= -\frac{1}{8} \tan \theta (8 + \sec \theta) - \frac{7}{8} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$= -\frac{2\sqrt{x^2-3x+2}}{8} (8 + 2x - 3) - \frac{7}{8} \ln |2x - 3 + 2\sqrt{x^2-3x+2}| + C$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{4} (5 + 2x) - \frac{7}{8} \ln |2x - 3 + 2\sqrt{x^2-3x+2}| + C$$



Observación 7. Si el integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$ ó $\sqrt{a^2 + u^2}$ ó $\sqrt{u^2 - a^2}$, a veces una sustitución hiperbólica es más efectiva.

Para $\sqrt{a^2 - u^2}$, la sustitución es $u = a \tanh t$.

Para $\sqrt{a^2 + u^2}$, la sustitución es $u = a \sinh t$.

Para $\sqrt{u^2 - a^2}$, la sustitución es $u = a \cosh t$.

En el primer caso, $\sqrt{a^2 - u^2} = a \operatorname{sech} t$.

En el segundo caso, $\sqrt{a^2 + u^2} = a \cosh t$.

En el tercer caso, $\sqrt{u^2 - a^2} = a \sinh t$.

Ejemplo 56. Calcule $I = \int x^2 \sqrt{x^2 + 4} dx$.

Solución

Usando la sustitución

$$x = 2 \sinh t, \quad dx = 2 \cosh t \, dt$$

tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \sqrt{x^2 + 4} dx = \int 4 \sinh^2 t \cdot 2 \cosh t \cdot 2 \cosh t \, dt \\ &= 16 \int \sinh^2 t \cosh^2 t \, dt = 4 \int \sinh^2 2t \, dt = 2 \int (\cosh 4t - 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \sinh 4t - 2t + C = 2 \sinh t \cosh t (\sinh^2 t + \cosh^2 t) - 2t + C \\ &= \frac{x \sqrt{4 + x^2}}{2} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{4 + x^2}{4} \right) - 2 \sinh^{-1} \frac{x}{2} + C \\ &= \frac{x \sqrt{4 + x^2}}{4} (x^2 + 2) - 2 \sinh^{-1} \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 57. Calcule $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$.

Solución

Completando el cuadrado en el trinomio y haciendo la sustitución

$$x + 2 = 3 \cosh t, \quad dx = 3 \sinh t \, dt$$

resulta

$$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 9}} = \int \frac{(3 \cosh t - 2)^2 3 \sinh t \, dt}{3 \sinh t}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int (3 \cosh t - 2)^2 dt = \int (9 \cosh^2 t - 12 \cosh t + 4) dt \\
 &= \int \left[9 \left(\frac{\cosh 2t + 1}{2} \right) - 12 \cosh t + 4 \right] dt \\
 &= \int \left[\frac{9}{2} \cosh 2t - 12 \cosh t + \frac{17}{2} \right] dt \\
 &= \frac{9}{4} \sinh 2t - 12 \sinh t + \frac{17}{2} t + C \\
 &= \frac{9}{2} \sinh t \cosh t - 12 \sinh t + \frac{17}{2} t + C \\
 &= \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}{6} (x - 6) + \frac{17}{2} \cosh^{-1} \left(\frac{x+2}{3} \right) + C
 \end{aligned}$$

Observación 8. Si la integral tiene la forma $\int R(x^n; \sqrt{a^2 \pm x^2}) dx$ ó $\int R(x^n; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, donde n es entero impar positivo, es preferible usar la sustitución $z^2 = a^2 \pm x^2$ ó $z^2 = x^2 - a^2$.

Ejemplo 58. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$

b) $\int \frac{(x^5 - x)}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$

c) $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 9)^{3/2}}$

d) $\int \frac{x^5 dx}{(3 - x^2)^4}$

Solución

a) Utilizando $z^2 = x^2 - 9$, $2z dz = 2x dx \Leftrightarrow z dz = x dx$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2 - 9}} &= \int \frac{x^4 (x dx)}{\sqrt{x^2 - 9}} = \int \frac{(z^2 + 9)^2 z dz}{z} \\
 &= \int (z^4 + 18z^2 + 9) dz = \frac{1}{5} z^5 + 6z^3 + 9z + C \\
 &= \frac{z}{5} (z^4 + 30z^2 + 45) + C \\
 &= \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{5} (x^4 + 12x - 144) + C
 \end{aligned}$$

b) Haciendo $z^2 = x^2 + 3$, $z \, dz = x \, dx$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^5 - x)}{\sqrt{x^2 + 3}} dx &= \int \frac{(x^4 - 1)(x \, dx)}{\sqrt{x^2 + 3}} = \int \frac{[(z^2 - 3)^2 - 1]z \, dz}{z} \\ &= \int (z^4 - 6z^2 + 8) dz = \frac{z^5}{5} - 2z^3 + 8z + C \\ &= \frac{z}{5} [z^4 - 10z^2 + 40] + C \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{5} (x^4 - 4x^2 + 19) + C\end{aligned}$$

c) Si se sustituye $z^2 = x^2 + 9$, $z \, dz = x \, dx$ resulta

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 \, dx}{(x^2 + 9)^{3/2}} &= \int \frac{x^2(x \, dx)}{(x^2 + 9)^{3/2}} = \int \frac{(z^2 - 9)(z \, dz)}{z^3} \\ &= \int \left(1 - \frac{9}{z^2}\right) dz \\ &= z + \frac{9}{z} + C = \frac{1}{z}(z^2 + 9) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}(x^2 + 18) + C\end{aligned}$$

d) Haciendo $z = 3 - x^2$, $x \, dx = -\frac{1}{2} dz$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5 \, dx}{(3 - x^2)^4} &= \int \frac{x^4(x \, dx)}{(3 - x^2)^4} = \int \frac{(3 - z)^2(-\frac{1}{2} dz)}{z^4} \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{9}{z^4} - \frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^2}\right) dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{z^3} - \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z}\right) + C \\ &= \frac{x^4 - 3x^2 + 3}{2(3 - x^2)^3} + C\end{aligned}$$

EJERCICIOS

$$1. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$R. \frac{1}{2} \arcsen x - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C$$

$$2. \int \sqrt{4+x^2} dx$$

$$R. \frac{1}{2} \left[x\sqrt{4+x^2} + \ln(x + \sqrt{4+x^2}) \right] + C$$

$$3. \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$R. 2 \arcsen \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{4} [x^3 - 2x] + C$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

$$R. -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

$$5. \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$$

$$R. \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}} \right) + C$$

$$6. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2x^2+7}}$$

$$R. \frac{\sqrt{2x^2+7}}{6} (x^2+7) + C$$

$$7. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+3}}$$

$$R. \frac{\sqrt{x^2+3}}{9x} - \frac{(x^2+3)^{3/2}}{27x^3} + C$$

$$8. \int \frac{(4x+5)dx}{(x^2-2x+2)^{3/2}}$$

$$R. \frac{9x-13}{\sqrt{x^2-2x+2}} + C$$

$$9. \int \frac{(2x-3)dx}{(x^2+2x-3)^{3/2}}$$

$$R. \frac{5x-3}{4\sqrt{x^2+2x-3}} + C$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x^3} dx$$

$$R. \frac{(x^2-4x)^{3/2}}{6x^3} + C$$

$$11. \int \frac{x^4 dx}{(4-x^2)^{7/2}}$$

$$R. \frac{x^5}{20(4-x^2)^{5/2}} + C$$

$$12. \int \frac{(x^2-25)^{3/2} dx}{x^6}$$

$$R. \frac{(x^2-25)^{5/2}}{125x^5} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}}$$

$$R. \frac{1}{2} \arcsen(x+1) + \frac{\sqrt{x^2+2x}}{2(x+1)^2} + C$$

$$14. \int \frac{\sen x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}}$$

$$R. -\ln |\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 1}| + C$$

$$15. \int \frac{e^x \sqrt{e^{2x} - 4} - 2e^{2x}(e^x + 2)}{2(e^x + 2)\sqrt{e^{2x} - 4}} dx \quad R. \frac{1}{2} \ln|e^x + 2| - \sqrt{e^{2x} - 4} + C$$

$$16. \int \frac{2x^2 - 4x + 4}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx \quad R. \arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) - (x-1)\sqrt{3 + 2x - x^2} + C$$

$$17. \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^{3/2}} \quad R. \frac{x-1}{4\sqrt{x^2 - 2x + 5}} + C$$

$$18. \int \frac{(x^2 + 3x)dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 10}} \\ R. \sqrt{x^2 - 2x + 10} + 5 \ln \left| \sqrt{x^2 - 2x + 10} + x + 1 \right| + \frac{4}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 10} - 3}{x-1} \right| + C$$

$$19. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}} \quad R. -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{3} (8 + x^2) + C$$

$$20. \int \frac{(3 + x^2)^2 x^3}{(1 + x^2)^2} dx \quad R. -\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^2}{2} + (x^2 + 1) + \frac{4}{x^2 + 1} \right] + C$$

$$21. \int \frac{\sqrt{y^2 - 4}}{y^4} dy \quad R. \frac{1}{12} \cdot \frac{(y^2 - 4)^{3/2}}{y^3} + C$$

$$22. \int \frac{dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 2}} \quad R. \arctan \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} + C$$

$$23. \int \frac{2x^2 + 1}{(x^2 + 4)^2} dx \quad R. \frac{1}{16} \left[\arctan \frac{x}{2} - \frac{14x}{x^2 + 4} \right] + C$$

$$24. \int \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \quad R. \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right) + C$$

$$25. \int \frac{3x \arcsen x}{\sqrt{(1 - x^2)^5}} dx \quad R. \frac{\arcsen x}{(1 - x^2)^{3/2}} - \frac{1}{2} \left[\frac{x}{1 - x^2} + \ln \left| \frac{x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} \right| \right] + C$$

$$26. \int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) dx \\ R. \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) \left(\frac{2}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 - z \right) + \frac{89}{60} \arcsen x - xz \left(\frac{25 + 6x^2}{60} \right) + C, \\ \text{donde } z = \sqrt{1 - x^2}$$

$$11 \int \frac{x^2 - 3}{x\sqrt{x^4 - 4}} dx \quad R. \frac{1}{2} \left[\ln |x^2 + \sqrt{x^2 - 4}| - \frac{3}{2} \arcsen \frac{x^2}{2} \right] + C$$

$$12 \int \frac{x dx}{(x^2 - 2)\sqrt{x^4 - 4x^2 + 5}} \quad R. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 5} - 1}{x^2 - 2} \right| + C$$

$$13 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4x^2 - 12x - 5}} \quad R. \frac{1}{8} \left[11 \arcsen \left(\frac{2x + 3}{2} \right) + \sqrt{-4x^2 - 12x - 5} (3 - 2x) \right] + C$$

$$14 \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^3} \quad R. \frac{1}{64} \left[\arctan \frac{x}{2} - \frac{2x(4 - x^2)}{(4 + x^2)^2} \right] + C$$

$$15 \int \frac{2x^3 dx}{(x^2 - 1)^4} \quad R. \frac{1 - 3x^2}{6(x^2 - 1)^3} + C$$

$$16 \int \frac{dx}{(9 - x^2)^3} \quad R. \frac{x}{36(9 - x^2)^2} + \frac{x}{216(9 - x^2)} + \frac{3}{4} \ln \left[\frac{(3 + x)^2}{9 - x^2} \right] + C$$

$$17 \int \frac{(4x^2 + 1)dx}{(x - 3)\sqrt{6x - x^2 - 8}} \quad R. 24 \arcsen(x - 3) + 37 \ln \left| \frac{1 - \sqrt{6x - x^2 - 8}}{x - 3} \right| - 4\sqrt{6x - x^2 - 8} + C$$

$$18 \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{(e^{2x} - 2e^x + 5))^3}} \quad R. \frac{e^x - 5}{4\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 5}} + C$$

$$19 \int \frac{\sinh 2x dx}{(2 \cosh^2 x - 3 \sinh^2 x - 2 \cosh x)^{5/2}} \quad R. \frac{3 - \cosh 2x}{2\sqrt{2} \cosh^2 x - 3 \sinh^2 x - 2 \cosh x} + C$$

$$20 \int \frac{8 \sen 2x \sen x dx}{(20 - 4 \sen 2x - 19 \sen^2 x)^{5/2}} \quad R. \frac{4 \tan x - 16}{3\sqrt{\tan^2 x - 8 \tan x + 20}} \left(\frac{5(\tan x - 4)^2}{\tan^2 x - 8 \tan x + 20} + 12 \right) + \frac{128}{3(\tan^2 x - 8 \tan x + 20)^{3/2}} + C$$

$$21 \int \frac{dx}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)^2} \quad R. \frac{1}{32} \ln \left[\frac{(x - 1)^2}{x^2 - 2x + 5} \right] + \frac{1}{8(x^2 - 2x + 5)} + C$$

1.5.4 MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

1.5.4.1 INTEGRACIÓN DE FRACCIONES SIMPLES

Se denominan fracciones simples a las funciones que se presentan bajo una de las formas siguientes:

$$\text{I) } f(x) = \frac{a}{x-r}$$

$$\text{II) } f(x) = \frac{a}{(x-r)^n}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{III) } f(x) = \frac{ax+b}{px^2+qx+r}, \text{ donde } px^2+qx+r \text{ no tiene raíces reales, es decir, } q^2-4pr < 0.$$

$$\text{IV) } f(x) = \frac{ax+b}{(px^2+qx+r)^n}, \text{ donde } n \geq 2, n \in \mathbb{N}, q^2-4pr < 0.$$

Las integrales de estas fracciones simples son inmediatas, pues

$$\text{i) } \int \frac{a}{x-r} dx = a \ln|x-r| + C$$

$$\text{ii) } \int \frac{a}{(x-r)^n} dx = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + C$$

$$\text{iii) } \int \frac{ax+b}{px^2+qx+r} dx \quad (\text{desarrollado en 1.5.1 caso III})$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \int \frac{ax+b}{(px^2+qx+r)^n} dx &= \frac{a}{2p} \int \frac{(2px+q)dx}{(px^2+qx+r)^n} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{(px^2+qx+r)^n} \\ &= -\frac{a}{2p(n-1)(px^2+qx+r)^{n-1}} + \left(b - \frac{aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{(px^2+qx+r)^n} \end{aligned}$$

Para calcular la integral J , al completar el cuadrado en el trinomio, se obtiene

$$J = \frac{1}{\sqrt{p}} \int \frac{du}{(u^2+k^2)^n}, \text{ donde } u = \sqrt{p} \cdot x + \frac{q}{2\sqrt{p}} \quad y \quad k = \sqrt{\frac{4rp-q^2}{4p}}$$

En esta última integral, se puede usar la sustitución trigonométrica $u = k \tan \theta$ ó la siguiente fórmula de reducción:

$$\int \frac{du}{(u^2+k^2)^n} = \frac{u}{2k^2(n-1)(u^2+k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2k^2(n-1)} \int \frac{du}{(u^2+k^2)^{n-1}}, (n \geq 2)$$

Ejemplo 59. Usando la fórmula de reducción, calcule $I = \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$.

Solución

En este caso $n = 2$ y $k = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} &= \frac{x}{2 \cdot 2^2(2-1)(x^2 + 4)^{2-1}} + \frac{2(2) - 3}{2 \cdot 2^2(2-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + 4)} \\ &= \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C = \frac{1}{16} \left(\arctan \frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2 + 4} \right) + C \end{aligned}$$

1.5.4.2 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

Sea la función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios coprimos de grados m y n ($m, n \in \mathbb{N}$), respectivamente.

Si $m < n$, se dice que la función racional es **propia** y cuando $m \geq n$, se dice que es una función racional **impropia**.

Por ejemplo, las funciones racionales

$$f(x) = \frac{5x - x^3}{2x^4 + 8} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x^5 - 6x^2 + 7}{2x^6 + 3x^3 + 2}$$

son propias, pues el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador; mientras que las funciones racionales

$$F(x) = \frac{3x^4 - 2x^2 + 7}{x^2 + 2x + 3} \quad \text{y} \quad G(x) = \frac{5x^3 - 3x^2 + 1}{2x^2 - 7x^3 + 4}$$

son impropias.

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional impropia, por el algoritmo de la división, existen polinomios $C(x)$ y $R(x)$ únicos tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. $C(x)$ y $R(x)$ son, respectivamente, el cociente y el resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$.

Esto significa que toda fracción impropia puede ser expresada como la suma de un polinomio y de una fracción propia. Así, la integral de una fracción impropia puede ser escrita como

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Enseguida, veremos el método de integración para una fracción propia, el cual se basa en que “toda fracción racional propia puede ser descompuesta en la suma de fracciones simples”. Este hecho se sustenta en el conocimiento de dos teoremas del Álgebra que admitiremos sin demostración.

Teorema 1. Si $Q(x)$ es un polinomio de grado n ($n \geq 1$), entonces $Q(x)$ se descompone como un producto de factores de 1er grado y de factores de 2do grado irreducibles en \mathbb{R} , de la siguiente forma:

$$Q(x) = a(x - r_1)^{n_1}(x - r_2)^{n_2} \dots (x - r_k)^{n_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s} \quad (*),$$

donde $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k + 2m_1 + \dots + 2m_s$

Teorema 2. Si el polinomio $Q(x)$ posee la descomposición (*) y $P(x)$ es un polinomio de grado menor que n , entonces la fracción propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone univocamente en fracciones simples como

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x - r_1} + \frac{A_{12}}{(x - r_1)^2} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x - r_1)^{n_1}} + \frac{A_{21}}{(x - r_2)} + \frac{A_{22}}{(x - r_2)^2} + \dots + \\ & + \frac{A_{2n_2}}{(x - r_2)^{n_2}} + \dots + \frac{A_{k1}}{(x - r_k)} + \frac{A_{k2}}{(x - r_k)^2} + \dots + \frac{A_{kn_k}}{(x - r_k)^{n_k}} + \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1m_1} + C_{1m_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} + \\ & + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + p_sx + q_s} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{(x^2 + p_sx + q_s)^2} + \dots + \frac{B_{sm_s} + C_{sm_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}} \end{aligned}$$

En resumen, podemos afirmar que la integración de una función racional (propia ó impropia) se reduce a integrar a lo más un polinomio y las fracciones simples. Recuerde que si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, primero se debe dividir (salvo que se emplee otro artificio de integración).

Cuando se descompone una función racional en fracciones simples, la ecuación resultante es una identidad, es decir, es verdadera para todos los valores significativos de la variable x . El método para determinar las constantes que se presentan en los numeradores de las fracciones simples se basa en un Teorema del Álgebra que establece que los polinomios de un mismo grado son idénticos cuando son iguales los coeficientes que corresponden a potencias iguales. Estas constantes también se pueden determinar resolviendo la igualdad de polinomios para un número suficiente de valores de x .

En el siguiente ejemplo, sin determinar las constantes, mostraremos como se descompone una fracción propia.

Sea la fracción propia

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{7x^4 - 2x^3 + x^2 - \sqrt{2}x + \pi}{(x+1)(x-4)^3(x^2+9)(x^2+1)^2}$$

La descomposición de esta fracción en fracciones simples se expresa como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2} + \frac{D}{(x-4)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+9} + \frac{Gx+H}{x^2+1} + \frac{Jx+M}{(x^2+1)^2}$$

donde $A, B, C, D, E, F, G, H, J$ y M son constantes a determinar.

Ejemplo 60. Calcule $J = \int \frac{x^3 - 3x + 3}{x^2 + x - 2} dx$.

Solución

En primer lugar, se divide, ya que el integrando es una fracción racional impropia.

$$\frac{x^3 - 3x + 3}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{1}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

$$\text{Luego, } J = \int (x-1)dx + \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2}{2} - x + I.$$

Al descomponer el integrando de I en fracciones simples, se tiene

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

donde A y B son constantes a determinar. Multiplicando esta ecuación por el mínimo común múltiplo del denominador, se obtiene la **ecuación principal**

$$1 = A(x+2) + B(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$$

Ahora bien, para determinar las constantes A y B se debe escoger valores apropiados de x . Estos valores son aquellos que hacen igual a cero el denominador de cada fracción simple. Así, tenemos:

Para $x = 1$ en la ecuación principal, nos queda: $1 = 3A \Leftrightarrow A = 1/3$

Para $x = -2$ en la ecuación principal, resulta: $1 = -3B \Leftrightarrow B = -1/3$

Luego,

$$I = \int \left(\frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$$

Por tanto,

$$J = \frac{x^2}{2} - x + I = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$$

En el ejemplo anterior, para calcular la integral I no es necesario descomponer en fracciones simples, pues también se puede calcular completando cuadrados. En los siguientes ejemplos, usaremos el método más adecuado.

Ejemplo 61. Halle $I = \int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2x + 5} dx$

Solución

Como el integrando es una fracción impropia, primero se divide y luego se aplica el artificio presentado en 1.5.1. Así, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2x + 5} dx = \int \left[1 + \frac{3 - 8x}{x^2 + 2x + 5} \right] dx = x - \int \frac{(8x - 3)dx}{x^2 + 2x + 5} \\ &= x - 4 \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx + 11 \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4} \\ &= x - 4 \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{11}{2} \arctan\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 62. Halle $J = \int \frac{dx}{x^3 + 1}$.

Solución

La descomposición que corresponde a la fracción propia del integrando es

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{\underbrace{x^2 - x + 1}_{\beta}}$$

Eliminando denominadores, obtenemos la ecuación principal:

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \quad (*)$$

Para $x = -1$ en la ecuación (*), se tiene: $1 = 3A \Rightarrow A = 1/3$.

Igualando coeficientes de x^2 en (*), resulta: $0 = A + B \Rightarrow B = -1/3$.

Igualando coeficientes de x en (*), obtenemos: $0 = -A + B + C \Rightarrow C = 2/3$.

En esta integral, el problema mayor es la integración de la fracción simple β . Un método que facilita la integración de este tipo de fracciones simples (y que se usa cuando el denominador presenta factores cuadráticos irreducibles) consiste en expresar el integrando como

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{D(2x - 1) + E}{x^2 - x + 1}$$

donde $2x - 1$ es la derivada del denominador $x^2 - x + 1$. Obsérvese que para integrar la segunda fracción es suficiente separar en dos integrales tal como veremos a continuación.

En la igualdad anterior, multiplicando por el denominador se obtiene la nueva ecuación principal:

$$1 = A(x^2 - x + 1) + [D(2x - 1) + E](x + 1) \quad (**)$$

Para $x = -1$ en (**), se obtiene: $1 = 3A \Rightarrow A = 1/3$.

Igualando coeficientes de x^2 en (**), resulta: $0 = A + 2D \Rightarrow D = -1/6$.

Igualando coeficientes de x en (**), se tiene: $0 = -A + D + E \Rightarrow E = 1/2$.

Luego,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{6}(2x-1) + \frac{1}{2}}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 63. Calcule $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

Solución

Como $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, aplicamos el método del ejemplo anterior. De este modo, la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B(2x+1)+C}{x^2+x+1}$$

Eliminando denominadores, se obtiene $A = 1/3$, $B = -1/6$, $C = -1/2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3-1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 64. Halle $I = \int \frac{dx}{(x-2)^2(x^2-4x+3)}$.

Solución

Como $(x-2)^2(x^2-4x+3) = (x-2)^2(x-3)(x-1)$, entonces

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x-1}$$

Eliminando denominadores, obtenemos la ecuación principal:

$$1 = A(x-2)(x-3)(x-1) + B(x-3)(x-1) + C(x-1)(x-2)^2 + D(x-3)(x-2)^2$$

Trabajando con esta ecuación principal, se tiene

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow 1 = -B \Rightarrow B = -1$$

$$\text{Para } x = 3 \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = 1/2$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow 1 = -2D \Rightarrow D = -1/2$$

$$\text{Igualando coeficientes de } x^3 \text{ resulta: } 0 = A + C + D \Rightarrow A = 0$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x-2)^2(x-3)(x-1)} = -\int \frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 65. Halle $I = \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx$.

Solución

Escribimos la integral como

$$I = \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx = \int \frac{\sqrt{\sin x} \cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

Haciendo $u^2 = \sin x \Rightarrow \cos x dx = 2u du$ y descomponiendo el resultado en fracciones simples, se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2u^2 du}{1-u^4} = \int \frac{2u^2 du}{(1-u^2)(1+u^2)} = \int \left[\frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u} - \frac{1}{1+u^2} \right] du \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| - \arctan u + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\sin x} + 1}{\sqrt{\sin x} - 1} \right| - \arctan \sqrt{\sin x} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 66. Calcule $I = \int \frac{dx}{x(x^{69} + 1)^3}$.

Solución

$$\text{Se tiene que } I = \int \frac{dx}{x(x^{69} + 1)^3} = \frac{1}{69} \int \frac{69 x^{68} dx}{x^{69}(x^{69} + 1)^3}.$$

Si en la última integral se hace $u = x^{69} + 1 \Rightarrow du = 69 x^{68} dx$, resulta

$$I = \frac{1}{69} \int \frac{du}{u^3(u-1)} = \frac{1}{69} \int \left[\frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u^3} + \frac{D}{u-1} \right] du$$

Determinando las constantes A , B , C y D por el procedimiento usado en los ejemplos anteriores, se obtiene

$$I = \frac{1}{69} \int \left[-\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3} + \frac{1}{u-1} \right] du = -\ln|u| + \frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + \ln|u-1| + C$$

$$= \frac{1}{69} \left[\ln \left| \frac{x^{69}}{x^{69}+1} \right| + \frac{1}{x^{69}+1} + \frac{1}{2(x^{69}+1)^2} \right] + C$$

Ejemplo 67. Calcule $I = \int \sqrt{\tan x} \, dx$.

Solución

Si hacemos $t^2 = \tan x \Rightarrow x = \arctan t^2$ y $dx = \frac{2t \, dt}{1+t^4}$, entonces

$$I = \int \frac{2t^2 \, dt}{1+t^4} = \int \frac{2t^2 \, dt}{(1+\sqrt{2}t+t^2)(1-\sqrt{2}t+t^2)}$$

La factorización de $1+t^4$ se realizó del siguiente modo:

$$1+t^4 = (t^2+1)^2 - 2t^2 = (t^2+1)^2 - (\sqrt{2}t)^2 = (t^2+1-\sqrt{2}t)(t^2+1+\sqrt{2}t)$$

La descomposición del integrando es

$$\frac{A(2t+\sqrt{2})+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{C(2t-\sqrt{2})+D}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \frac{2t^2}{1+t^4}$$

Eliminando denominadores, se tiene

$$2t^2 = [A(2t+\sqrt{2})+B][t^2-\sqrt{2}t+1] + [C(2t-\sqrt{2})+D][t^2+\sqrt{2}t+1]$$

Igualando los coeficientes de las potencias de t en los dos polinomios, se obtiene

$$2A+2C=0, \quad (B+D)+\sqrt{2}(C-A)=2,$$

$$\sqrt{2}(B-D)=0, \quad \sqrt{2}(A-C)+B+D=0$$

Resolviendo las ecuaciones, resulta

$$A = -\sqrt{2}/4, \quad C = \sqrt{2}/4, \quad B = -1/2, \quad D = 1/2$$

Luego,

$$I = -\frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}$$

Integrando y simplificando, se obtiene

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1} \right| - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}t+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}t-1) + C$$

donde $t = \sqrt{\tan x}$.

Ejemplo 68. Calcule $I = \int \frac{x \sec^2 x \, dx}{3 + 4 \tan x + \sec^2 x}$.

Solución

Escribimos la integral como

$$I = \int \frac{x \sec^2 x \, dx}{3 + 4 \tan x + \sec^2 x} = \int \frac{x \sec^2 x \, dx}{3 + 4 \tan x + (1 + \tan^2 x)} = \int \frac{x \sec^2 x \, dx}{(\tan x + 2)^2}$$

Aplicando el método de integración por partes, elegimos

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{\sec^2 x \, dx}{(\tan x + 2)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{\tan x + 2} \end{cases}$$

Luego,

$$I = -\frac{x}{\tan x + 2} + \int \frac{dx}{\tan x + 2}$$

Haciendo $t = \tan x \Rightarrow dt = \sec^2 x \, dx$ en la integral J , se tiene

$$J = \int \frac{dx}{\tan x + 2} = \int \frac{\sec^2 x \, dx}{(\tan x + 2)(1 + \tan^2 x)} = \int \frac{dt}{(t + 2)(1 + t^2)}$$

Descomponiendo el integrando en fracciones simples, tenemos

$$\frac{1}{(t + 2)(1 + t^2)} = \frac{\frac{1}{5}}{t + 2} + \frac{-\frac{1}{10}(2t) + \frac{2}{5}}{1 + t^2}$$

Luego,

$$J = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t + 2} - \frac{1}{10} \int \frac{2t \, dt}{1 + t^2} + \frac{2}{5} \int \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$J = \frac{1}{5} \ln|t + 2| - \frac{1}{10} \ln|1 + t^2| + \frac{2}{5} \arctan t + C$$

$$J = \frac{1}{5} \ln|\tan x + 2| - \frac{1}{10} \ln|1 + \tan^2 x| + \frac{2}{5} \arctan(\tan x) + C$$

Finalmente, obtenemos

$$I = -\frac{x}{\tan x + 2} + \frac{1}{10} \ln \left[\frac{(\tan x + 2)^2}{\sec^2 x} \right] + \frac{2}{5} x + C$$

EJERCICIOS

Halle las siguientes integrales indefinidas:

$$1. \int \frac{4x^2 + 6}{x^3 + 3x} dx \quad R. \ln[x^2(x^2 + 3)] + C$$

$$2. \int \frac{x^5}{(x^2 + 4)^2} dx \quad R. \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x^2 + 4} - 4 \ln|x^2 + 4| + C$$

$$3. \int \frac{x^4 - 4x^2 - 14x}{x^2 - 2x - 8} dx \quad R. \frac{x^3}{3} + x^2 + 8x + \frac{68}{3} \ln|x - 4| - \frac{14}{3} \ln|x + 2| + C$$

$$4. \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^3} \quad R. \frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x + 5)^2} + \frac{3(x+1)}{4(x^2 + 2x + 5)} + \frac{3}{8} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

$$5. \int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx \quad R. -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + C$$

$$6. \int \frac{x+1}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx \quad R. \frac{\ln|x|}{3} - \frac{\ln(x^2 - 2x + 3)}{6} + \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

$$7. \int \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x^2} dx \quad R. \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right| + C$$

$$8. \int \frac{x^2 + x - 2}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \quad R. \frac{1}{6} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}\right) - \arctan x + \arctan \frac{x}{2} + C$$

$$9. \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx \quad R. \frac{3}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) - \ln|x-1| + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

$$10. \int \frac{x^2}{1 - x^6} dx \quad R. \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}\right| + C$$

$$11. \int \frac{x^2 dx}{x^6 - 10x^3 + 9} \quad R. \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x^3 - 9}{x^3 - 1}\right| + C$$

$$12. \int \frac{x^3 + 4x + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx \quad R. \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$13. \int \frac{2x}{x^4 + x^2 + 1} dx \quad R. \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

14. $\int \frac{2x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$
 R. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C$
15. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 - 10x^3 + 9}$
 R. $\frac{1}{24} \ln \left| \frac{x^3 - 9}{x^3 - 1} \right| + C$
16. $\int \frac{dx}{1 + x^4}$
 R. $\frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2}x + x^2}{1 - \sqrt{2}x + x^2} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + C$
17. $\int \frac{dx}{x^8 + x^6}$
 R. $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \arctan x + C$
18. $\int \frac{x^7 + x^3}{x^{12} - 24x + 1} dx$
 R. $\frac{1}{2} \ln|x^4 - 1| - \frac{1}{4} \ln|x^6 + x^4 - 1| - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x^4 + 1 - \sqrt{5}}{2x^4 + 1 + \sqrt{5}} \right| + C$
19. $\int \frac{dx}{x(x^7 + 1)^2}$
 R. $\ln|x| - \frac{1}{7} \ln|x^7 + 1| + \frac{1}{7(x^7 + 1)} + C$
20. $\int \frac{dx}{x(x^{999} + 1)^2}$
 R. $\ln|x| - \frac{1}{999} \ln|x^{999} + 1| + \frac{1}{999(x^{999} + 1)} + C$
21. $\int \frac{dx}{x(x^9 + 1)^3}$
 R. $\ln|x| - \frac{1}{9} \ln|x^9 + 1| + \frac{1}{9(x^9 + 1)} + \frac{1}{18(x^9 + 1)^2} + C$
22. $\int \frac{dx}{x^{12}(x^{11} + 1)}$
 R. $\frac{1}{11} \ln|x^{11} + 1| - \frac{1}{11x^{11}} - \ln|x| + C$
23. $\int \frac{\cot x dx}{(\sec^7 x + 1)}$
 R. $\ln|\sec x| - \frac{1}{7} \ln|\sec^7 x + 1| + \frac{1}{7(\sec^7 x + 1)} + C$
24. $\int \frac{\tan x dx}{(\cos^{99} x + 1)}$
 R. $\frac{1}{99} \ln|\cos^{99} x + 1| - \ln|\cos x| - \frac{1}{99(\cos^{99} x + 1)} + C$
25. $\int \frac{x^4 \sqrt{\sec x} + \sqrt{\sec x} + \cos x}{(x^4 + 1) \cos x} dx$
 R. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\sec x} + 1}{\sqrt{\sec x} - 1} \right| - \arctan(\sqrt{\sec x}) + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + C$

$$26. \int \frac{dx}{x^5 + 1}$$

$$R. \frac{\sqrt{5}}{20} \ln \left| \frac{2x^2 - (1 - \sqrt{5})x + 2}{2x^2 - (1 + \sqrt{5})x + 2} \right| + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{10} \arctan \left(\frac{4x - (1 + \sqrt{5})}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \right) + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10} \arctan \left(\frac{4x - (1 - \sqrt{5})}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right) + C$$

$$27. \int \sqrt{\tanh x} dx$$

$$R. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tanh x + 1}{\tanh x - 1} \right| - \frac{1}{2} \arctan(\tanh x) + C$$

$$28. \int \frac{\cos x \sqrt{\sin x + 1}}{\sin x + 2} dx$$

$$R. 2\sqrt{\sin x + 1} - 2 \arctan \sqrt{\sin x} + C$$

$$29. \int \frac{dx}{\sin 5x(1 + \cos 5x)}$$

$$R. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos 5x - 1}{\cos 5x + 1} \right| + \frac{1}{2(\cos 5x + 1)} + C$$

$$30. \int \frac{2 dx}{\sqrt{\cos x} \sin x}$$

$$R. \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 + \sqrt{\cos x}} \right| + 2 \arctan(\sqrt{\cos x}) + C$$

$$31. \int \frac{x^5}{x^3 - 1} dx$$

$$R. \frac{1}{3} [x^3 - \ln(x^3 - 1)] + C$$

$$32. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx$$

$$R. \frac{2 - x}{4(x^2 + 2)} - \ln \sqrt{x^2 + 2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

$$33. \int \frac{4x^2 - 8x}{(x - 1)^2(x^2 + 1)^2} dx$$

$$R. \frac{3x^2 - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} + \ln \left(\frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \right) + \arctan x + C$$

$$34. \int \frac{dx}{(x^2 - x)(x^2 - x + 1)^2}$$

$$R. \ln \left| \frac{x - 1}{x} \right| - \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{2x - 1}{3(x^2 - x + 1)} + C$$

$$35. \int \frac{3x + 2}{x(x + 1)^3} dx$$

$$R. \frac{4x + 3}{2(x + 1)^2} + \ln \frac{x^2}{(x + 1)^2} + C$$

1.6 INTEGRACIÓN DE ALGUNAS FUNCIONES IRRACIONALES

Hemos visto que las funciones racionales poseen integrales que se expresan como combinaciones lineales finitas de funciones elementales. Esto no sucede con las funciones irracionales salvo en algunos casos particulares.

En esta sección y en las siguientes, vamos a estudiar algunos tipos de funciones irracionales cuyas integrales pueden ser expresadas como una suma finita de funciones elementales. Para esto, es necesario un adecuado cambio de variable de manera que el integrando de la nueva integral sea una función racional.

1.6.1 INTEGRALES DEL TIPO $\int R \left[x; \left(\frac{a+bx}{c+dx} \right)^{m_1/n_1}; \dots; \left(\frac{a+bx}{c+dx} \right)^{m_k/n_k} \right] dx$

En este caso, R es una función racional de variables

$$x, \left(\frac{a+bx}{c+dx} \right)^{m_1/n_1}, \dots \text{ y } \left(\frac{a+bx}{c+dx} \right)^{m_k/n_k}, \text{ donde } m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, los exponentes de $\frac{a+bx}{c+dx}$ son números racionales.

En esta situación, se hace el cambio de variable

$$\frac{a+bx}{c+dx} = t^n, \text{ donde } n = \text{m. c. m. } \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$$

Despejando x , se obtiene

$$x = \frac{t^n c - a}{b - dt^n} \text{ y } dx = \frac{(bc - ad)nt^{n-1}}{(b - dt^n)^2} dt$$

Sustituyendo estas expresiones en el integrando, se obtiene que R es una función racional de variable t .

Ejemplo 69. Calcule $J = \int \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^{1/4})}$.

Solución

En este caso, los exponentes fraccionarios de x son $1/2$ y $1/4$. Entonces

$$\text{m. c. m. } \{2, 4\} = 4$$

Haciendo el cambio de variable $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt$ resulta

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{4t^3 dt}{t^2(1+t)} = \int \frac{4t}{1+t} dt = \int \left(4 - \frac{4}{t+1} \right) dt \\ &= 4t - 4 \ln|t+1| + C = 4x^{1/4} - 4 \ln|x^{1/4} + 1| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 70. Halle $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}$.

Solución

Los exponentes fraccionarios de $x-1$ son $1/2$ y $1/3$.

Si se hace $x-1 = t^6$ ($6 = \text{m. c. m.}\{2, 3\}$) $\Rightarrow dx = 6t^5 dt$.

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1| + C \\ &= 2\sqrt{x-1} - 3\sqrt[3]{x-1} + 6\sqrt[6]{x-1} - 6 \ln|\sqrt[6]{x-1} + 1| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 71. Calcule $I = \int \sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}} \frac{dx}{x}$.

Solución

Se escribe

$$I = \int \sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{x^2-1}{1+x^2}} \cdot \frac{2x dx}{x^2}$$

Haciendo el cambio de variable $z = x^2$, se obtiene

$$I = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{z-1}{1+z}} \frac{dz}{z}$$

En esta última integral, el criterio estudiado nos sugiere reemplazar $\frac{z-1}{1+z} = t^2$.

Dejamos al lector seguir este camino. Resolvemos la integral usando el siguiente artificio:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{(z-1)dz}{z\sqrt{1+z}\sqrt{z-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{(z-1)dz}{z\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}$$

$$\frac{1}{2} \ln|z + \sqrt{z^2-1}| - \frac{1}{2} \operatorname{arcsec}|z| + C$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2 + \sqrt{x^4-1}| - \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} x^2 + C$$

Ejemplo 72. Calcule $I = \int \sqrt{\tan^2 x + 2} dx$.

Solución

Escribimos la integral como

$$I = \int \frac{\tan^2 x + 2}{\sqrt{\tan^2 x + 2}} dx = \int \frac{\sec^2 x + 1}{\sqrt{\tan^2 x + 2}} dx = \underbrace{\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 2}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{\tan^2 x + 2}}}_{I_2}$$

Aplicando las fórmulas de integración correspondiente a cada integral, tenemos

$$I_1 = \ln |\tan x + \sqrt{\tan^2 x + 2}| + C_1$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}} = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} = \arcsen\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + C_2$$

Por consiguiente,

$$I = \ln |\tan x + \sqrt{\tan^2 x + 2}| + \arcsen\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

1. 6. 2 INTEGRALES DE LA FORMA $\int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{px^2 + qx + r}}, n \in \mathbb{N}$

Para calcular esta integral, se debe usar la siguiente **sustitución recíproca**

$$x - a = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$$

Ejemplo 73. Calcule $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4x^2 + x + 4}}$.

Solución

Haciendo la sustitución $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2} \sqrt{4\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 4}} = - \int \frac{t dt}{\sqrt{4t^2 + t + 4}} = - \int \frac{\frac{1}{8}(8t + 1) - \frac{1}{8}}{\sqrt{4t^2 + t + 4}} dt \\ &= -\frac{1}{8} \int \frac{(8t + 1)dt}{\sqrt{4t^2 + t + 4}} + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(2t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{63}{16}}} \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{4t^2 + t + 4} + \frac{1}{2\sqrt{63}} \ln \left| 2t + \frac{1}{4} + \sqrt{4t^2 + t + 4} \right| + C \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{4 + 4x^2 + x}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{63}} \ln \left| \frac{8 + x}{4x} + \frac{\sqrt{4x^2 + x + 4}}{x} \right| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 74. Calcule $I = \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+3x-9}}$.

Solución

Como $x-2 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$, entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t}+2\right)^2 + 3\left(\frac{1}{t}+2\right) - 9}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 7t + 1}} \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}}} = - \ln \left| t + \frac{7}{2} + \sqrt{t^2 + 7t + 1} \right| + C \\ &= - \ln \left| \frac{7x-12}{2(x-2)} + \frac{\sqrt{x^2+3x-9}}{x-2} \right| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 75. Calcule $J = \int \frac{(x+3)dx}{x^2\sqrt{3x^2+2x+1}}$.

Solución

Si se hace $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Luego,

$$\begin{aligned} J &= - \int \frac{\left(\frac{1}{t}+3\right)\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{3}{t^2} + \frac{2}{t} + 1}} = - \int \frac{(1+3t)dt}{\sqrt{t^2+2t+3}} \\ &= -\frac{3}{2} \int \frac{2t+2}{\sqrt{t^2+2t+3}} dt + 2 \int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2+2}} \\ &= -3\sqrt{t^2+2t+3} + 2 \ln \left| t+1 + \sqrt{t^2+2t+3} \right| + C \\ &= -\frac{3\sqrt{3x^2+2x+1}}{x} + 2 \ln \left| \frac{x+1 + \sqrt{3x^2+2x+1}}{x} \right| + C \end{aligned}$$

En algunos casos, la sustitución recíproca puede facilitar el proceso de integración, como veremos en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 76. Calcule $I = \int \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4} dx$.

Solución

Si se hace $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}}}{\frac{1}{t^4}} \frac{dt}{t^2} = - \int \sqrt[3]{t^2 - 1} t dt, (u = t^2 - 1, du = 2t dt) \\ &= -\frac{1}{2} \int (t^2 - 1)^{1/3} 2t dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} (t^2 - 1)^{4/3} \right] + C = -\frac{3}{8} \left(\frac{1-x^2}{x^2} \right)^{4/3} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 77. Calcule $I = \int \frac{dx}{(x+1)^4 x^2}$.

Solución

Si se hace $x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^4} \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^2} = - \int \frac{t^4 dt}{(1-t)^2} = - \int \left(t^2 + 2t + 3 - \frac{4}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} \right) dt \\ &= - \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + 3t + 4 \ln(1-t) + \frac{1}{1-t} \right] + C \\ &= - \left[\frac{1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} + 4 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{x+1}{x} \right] + C \end{aligned}$$

1. 6. 3 INTEGRALES DE LA FORMA $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

En este caso, R es una función racional en las variables x y $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Una integral de esta forma se calcula usando las “sustituciones de Euler”. Estas sustituciones permiten transformar el integrando en una función racional de variable t . Se presentan 3 casos:

CASO I. Si $c \geq 0$, el cambio de variable es $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$.

Elevando al cuadrado, resulta

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= t^2 x^2 + 2\sqrt{c} tx + c \\ \Leftrightarrow (a - t^2)x^2 + (b - 2\sqrt{c} t)x &= 0 \\ \Leftrightarrow x[(a - t^2)x + b - 2\sqrt{c} t] &= 0 \end{aligned}$$

En esta última ecuación, eliminando la solución $x = 0$, se obtiene $x = \varphi(t)$, que es una función racional de t , y $dx = \varphi'(t)dt$, donde $\varphi'(t)$ es también una función racional de t . Por lo tanto,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(\varphi(t); t\varphi(t) + \sqrt{c}) \varphi'(t) dt$$

donde el integrando del segundo miembro es una función racional de variable t .

Ejemplo 78. Calcule $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 + x + 1}}$.

Solución

Haciendo $y = \sqrt{2x^2 + x + 1} = tx + 1$ y elevando al cuadrado, se obtiene

$$2x^2 + x = t^2x^2 + 2tx$$

Eliminando la solución $x = 0$, se obtiene

$$x = \frac{2t-1}{2-t^2}, \quad dx = \frac{2(t^2-t+2)}{(2-t^2)^2} dt, \quad y = \frac{t(2t-1)}{2-t^2} + 1 = \frac{t^2-t+2}{2-t^2}$$

Luego, reemplazando estos valores en la integral y simplificando, nos queda

$$J = \int \frac{2 dt}{2t-1} = \ln|2t-1| + C = \ln \left| \frac{2\sqrt{2x^2 + x + 1} - 2 - x}{x} \right| + C$$

CASO II. Si $a \geq 0$, se hace la sustitución $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$.

Elevando al cuadrado y simplificando, se obtiene $bx + c = 2\sqrt{at}x + t^2$. De esta ecuación, se obtiene que x y $\frac{dx}{dt}$ son funciones racionales de t y por tanto, el nuevo integrando es también una función racional de variable t .

Ejemplo 79. Calcule $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Solución

Sea $y = \sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$.

Elevando al cuadrado, se obtiene $x^2 + x + 1 = x^2 + 2tx + t^2$. Luego,

$$x = \frac{t^2-1}{1-2t}, \quad dx = 2 \left[\frac{-t^2+t-1}{(1-2t)^2} \right] dt, \quad y = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}$$

Finalmente, reemplazando estos valores en I y simplificando, se tiene

$$I = 2 \int \frac{dt}{t^2-1} = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 1} \right| + C$$

CASO III. El trinomio $ax^2 + bx + c$ tiene dos raíces reales r y s . En este caso, la sustitución es $y = \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - r)$.

Elevando al cuadrado, se obtiene

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s) = t^2(x - r)^2$$

Cancelando el factor $x - r$, resulta $a(x - s) = t^2(x - r)$.

De esta igualdad, se sigue que x , $\frac{dx}{dt}$ e y son funciones racionales de t y, por ende, el nuevo integrando es también una función racional de variable t .

Ejemplo 80. Calcule $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

Solución

Como $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$, reemplazamos

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{(x - 2)(x - 1)} = t(x - 1)$$

Elevando al cuadrado y simplificando el factor $x - 1$, queda $x - 2 = t^2(x - 1)$.

Luego, se obtiene

$$x = \frac{2 - t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2t \, dt}{(1 - t^2)^2} \quad \wedge \quad y = \frac{t}{1 - t^2}$$

Finalmente,

$$I = -2 \int \frac{dt}{t^2 - 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x - 2} + \sqrt{2(x - 1)}}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2(x - 1)}} \right| + C$$

1. 6. 4 INTEGRALES DE LA FORMA: $\int x^m(a + bx^n)^p \, dx$

A una expresión de la forma $x^m(a + bx^n)^p \, dx$, donde m , n y p son números racionales, se llama binomio diferencial. Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), el matemático ruso más eminente del siglo XIX, demostró que la integral de los binomios diferenciales con exponentes racionales puede expresarse mediante funciones elementales solamente en los casos siguientes (siempre que $a \neq 0$ y $b \neq 0$):

CASO I: p es un número entero

CASO II: $\frac{m+1}{n}$ es un número entero

CASO III: $\frac{m+1}{n} + p$ es un número entero

Si ninguno de los números p , $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ es entero, la integral no puede ser expresada mediante funciones elementales.

CASO I. Si p es un número entero, se hace la sustitución $x = z^r$, donde $r = \text{m. c. m. de los denominadores de las fracciones } m \text{ y } n$.

CASO II. Si $\frac{m+1}{n}$ es un número entero, hacemos la sustitución $a + bx^n = z^s$, donde s es el denominador de la fracción p (como p es un número racional, $p = \frac{r}{s}$, con r y s números enteros coprimos)

CASO III. Si $\frac{m+1}{n} + p$ es un número entero, se utiliza la sustitución

$$a + bx^n = z^s x^n \quad \text{ó} \quad ax^{-n} + b = z^s$$

donde s es el denominador de la fracción p .

Ejemplo 81. Calcule $I = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} dx$.

Solución

En este caso, $m = 1/2$, $n = 1/3$, $p = -2 \in \mathbb{Z}$ (caso I) y $\text{m. c. m. } \{2, 3\} = 6$.

La sustitución es $x = z^6$, $dx = 6z^5 dz$, $x^{1/2} = z^3$ y $x^{1/3} = z^2$.

Así, tenemos

$$I = \int \frac{x^{1/2}}{(1 + x^{1/3})^2} dx = \int \frac{z^3 \cdot 6z^5 dz}{(1 + z^2)^2} = 6 \int \frac{z^8}{(1 + z^2)^2} dz$$

Efectuando la división en el integrando, se obtiene

$$I = 6 \int \left(z^4 + 2z^2 + 3 - \frac{4z^2 + 3}{(1 + z^2)^2} \right) dz = 6 \left(\frac{z^5}{5} - \frac{2z^3}{3} + 3z \right) - 6 \underbrace{\int \frac{4z^2 + 3}{(1 + z^2)^2} dz}_J$$

Para calcular la integral J , usamos la sustitución trigonométrica $z = \tan \theta$.

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{4z^2 + 3}{(1 + z^2)^2} dz = \int \frac{(4 \tan^2 \theta + 3) \sec^2 \theta d\theta}{\sec^4 \theta} = \int (4 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int (3 + \sin^2 \theta) d\theta = \int \left(3 + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{7}{2} \theta - \frac{\sin 2\theta}{4} + C_1 \\ &= \frac{7}{2} \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} + C_1 = \frac{7}{2} \arctan z - \frac{z}{2(1 + z^2)} + C_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \frac{6}{5} z^5 - 4z^3 + 18z - 21 \arctan z + \frac{3z}{1 + z^2} + C \\ &= \frac{6}{5} x^{5/6} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} - 21 \arctan \sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[6]{x}} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 82. Calcule $I = \int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4} dx$.

Solución

En este caso, se tiene $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{4}$ y $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$ (caso II).

Ahora, la sustitución es

$$2 + x^{2/3} = z^4, \quad \frac{2}{3}x^{-1/3} dx = 4z^3 dz \quad \text{ó} \quad dx = 6x^{1/3}z^3 dz$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int x^{1/3}(z^4)^{1/4} 6x^{1/3}z^3 dz = 6 \int x^{2/3}z^4 dz = 6 \int (z^4 - 2)z^4 dz \\ &= 6 \left(\frac{z^9}{9} - \frac{2z^5}{5} \right) + C = \frac{2}{3}(2 + x^{2/3})^{9/4} - \frac{12}{5}(2 + x^{2/3})^{5/4} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 83. Calcule $I = \int \frac{dx}{x^6(65-x^6)^{1/6}}$.

Solución

Escribimos la integral como $I = \int x^{-6}(65-x^6)^{-1/6} dx$.

Puesto que $m = -6$, $n = 6$, $p = -\frac{1}{6}$ y $\frac{m+1}{n} + p = -1 \in \mathbb{Z}$ (caso III); hacemos la sustitución

$$65 - x^6 = z^6 x^6 \quad \text{ó} \quad z^6 = 65x^{-6} - 1, \quad dx = -\frac{1}{65}x^7 z^5 dz$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int x^{-6}(z^6 x^6)^{-1/6} \left(-\frac{1}{65}x^7 z^5 dz \right) = -\frac{1}{65} \int z^4 dz \\ &= -\frac{1}{325}z^5 + C = -\frac{(65-x^6)^{5/6}}{325x^5} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 84. Calcule $I = \int \sqrt{x}\sqrt{x^3+1} dx$.

Solución

La integral tiene la forma $I = \int x^{1/2}(1+x^3)^{1/2} dx$. Luego,

$$m = \frac{1}{2}, \quad n = 3, \quad p = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{m+1}{n} + p = 1 \in \mathbb{Z}$$

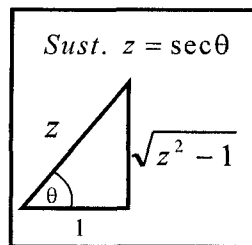
Ahora, hacemos $1+x^3 = z^2 x^3$ ó $x^{-3} + 1 = z^2$, $dx = -2/3 x^4 z dz$.

Entonces

$$I = \int x^{1/2} (z^2 x^3)^{1/2} \left(-\frac{2}{3} x^4 z dz \right) = -\frac{2}{3} \int x^6 z^2 dz = -\frac{2}{3} \int \frac{1}{(z^2 - 1)^2} \cdot z^2 dz$$

Para calcular la última integral, usamos la sustitución $z = \sec \theta$. Así, se tiene

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{3} \int \frac{\sec^2 \theta \sec \theta \tan \theta d\theta}{\tan^4 \theta} = -\frac{2}{3} \int \frac{\sec^3 \theta}{\tan^3 \theta} d\theta = -\frac{2}{3} \int \csc^3 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int \sqrt{1 + \cot^2 \theta} (-\csc^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{3} [\cot \theta \csc \theta + \ln |\cot \theta + \csc \theta|] + C \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{z}{z^2 - 1} + \ln \left| \frac{1 + z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right| \right] + C \\ &= \frac{x\sqrt{x^4 + x}}{3} + \frac{1}{6} \ln |x^{3/2} + \sqrt{1 + x^3}| + C \end{aligned}$$



Ejemplo 85. Calcule $I = \int \frac{\sqrt[4]{1 + e^{4x}}}{e^x} dx$.

Solución

Haciendo $t = e^x$, $dx = \frac{dt}{t}$ resulta

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{1 + e^{4x}}}{e^x} dx = \int \frac{\sqrt[4]{1 + t^4}}{t^2} dt = \int t^{-2} (1 + t^4)^{1/4} dt$$

Como $m = -2$, $n = 4$, $p = \frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n} + p = 0 \in \mathbb{Z}$, entonces

$$1 + t^4 = z^4 t^4 \quad \text{ó} \quad t^{-4} + 1 = z^4 \quad \text{y} \quad dt = -t^5 z^3 dz$$

Luego, se tiene

$$\begin{aligned} I &= - \int t^{-2} (z^4 t^4)^{1/4} t^5 z^3 dz = - \int t^4 z^4 dz = - \int \frac{z^4}{z^4 - 1} dz \\ &= \int \left(-1 - \frac{1}{z^4 - 1} \right) dz = -z - \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{z^2 - 1} - \frac{1}{z^2 + 1} \right] dz \\ &= -z - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z - 1}{z + 1} \right| + \frac{1}{2} \arctan z + C \end{aligned}$$

Finalmente, retornando a la variable inicial x , se tiene

$$I = -\frac{\sqrt[4]{1 + e^{4x}}}{e^x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1 + e^{4x}} - e^x}{\sqrt[4]{1 + e^{4x}} + e^x} \right| + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt[4]{1 + e^{4x}}}{e^x} \right) + C$$

Ejemplo 86. Calcule $J = \int \frac{6 dx}{\sin x \sqrt[3]{\cos^3 x + \sin^3 x}}$.

Solución

Dividiendo numerador y denominador entre $\cos^2 x$, se obtiene

$$J = \int \frac{6 dx}{\sin x \sqrt[3]{\cos^3 x + \sin^3 x}} = \int \frac{6 \sec^2 x dx}{\tan x \sqrt[3]{1 + \tan^3 x}}$$

Haciendo $t = \tan x$, tenemos

$$J = \int \frac{6 dt}{t \sqrt[3]{1 + t^3}} = \int 6t^{-1}(1 + t^3)^{-1/3} dt$$

Puesto que $m = -1$, $n = 3$, $p = -\frac{1}{3}$ y $\frac{m+1}{n} = 0 \in \mathbb{Z}$, hacemos

$$1 + t^3 = z^3, dt = t^{-2} z^2 dz$$

Luego,

$$J = \int 6t^{-1}(z^3)^{-1/3} t^{-2} z^2 dz = \int 6t^{-3} z dz = \int \frac{6z dz}{z^3 - 1}$$

Para calcular la última integral, usamos el método de descomposición en fracciones simples, esto es,

$$J = \int \left[\frac{A}{z-1} + \frac{B(2z+1)+C}{z^2+z+1} \right] dz$$

Mediante operaciones, se obtiene que los valores de A , B y C son: $A = 2$, $B = -1$ y $C = 4$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{2}{z-1} dz - \int \frac{2z+1}{z^2+z+1} dz + 4 \int \frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= 2 \ln|z-1| - \ln|z^2+z+1| + \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) + C \\ &= 2 \ln|(1+t^3)^{1/3} - 1| - \ln|(1+t^3)^{2/3} + (1+t^3)^{1/3} + 1| + \\ &\quad + \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{1+t^3} + 1}{\sqrt{3}}\right) + C, \text{ donde } t = \tan x \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Calcule las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ $R. 2\sqrt{x} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6\ln|1 + x^{1/6}| + C$
2. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x + x^{4/5}}$ $R. 2x^{1/2} - \frac{10}{3}x^{3/10} + 10x^{1/10} - 10\arctan(x^{1/10}) + C$
3. $\int \frac{5x^2 + 20x - 24}{\sqrt{x+5}}$ $R. 2(x+5)^{5/2} - 20(x+5)^{3/2} + 2(x+5)^{1/2} + C$
4. $\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{2x-3} + 8x-12}$ $R. \frac{1}{2} \arctan\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2x-3}\right) + C$
5. $\int \frac{8x + 21\sqrt{2x-5}}{4 + \sqrt{2x-5}} dx$ $R. \frac{(2-x-5)(8\sqrt{2x-5} + 15)}{6} + C$
6. $\int \frac{dx}{(x+1)^{3/4} - (x+1)^{5/4}}$ $R. 4 \tanh^{-1}[(x+1)^{1/4}] + C$
7. $\int \frac{(x-2)^{2/3} dx}{(x-2)^{2/3} + 3}$ $R. (x-2) - 9\sqrt[3]{x-2} + 9\sqrt{3} \arctan\left(\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3}}\right) + C$
8. $\int \frac{x^{1/7} + x^{1/2}}{x^{8/7} + x^{15/14}} dx$ $R. 7x^{1/7} - 14x^{1/14} + 28 \ln(x^{1/14} + 1) + C$
9. $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^3} + 1} dx$ $R. \frac{4}{5}x^{5/4} - \frac{4}{3}x^{3/4} + 2x^{1/2} + 4x^{1/4} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) - 4 \arctan \frac{x}{2} + C$
10. $\int \frac{9\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx$ $R. \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C$
11. $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-9}{x+9}} dx$ $R. -\ln|x+9| - \frac{4}{3} \arctan\left(\frac{3x-12}{2x+18}\right) + C$
12. $\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx$ $R. \frac{3}{4} \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2/3} + C$
13. $\int \sqrt{\sen^2 x + \sen x} dx$ $R. -\sqrt{\sen x - \sen^2 x} - \arcsen \sqrt{1 - \sen x} + C$
14. $\int \sqrt{\cos^2 x + \cos x} dx$ $R. \sqrt{\cos x - \cos^2 x} + \arcsen \sqrt{1 - \cos x} + C$

15. $\int \frac{dx}{(\cos x - \operatorname{sen} x)\sqrt{\cos 2x}}$ R. $\sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}} + C$
16. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$ R. $-\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$
17. $\int \sqrt{\frac{2 - \operatorname{sen} x}{3 + \operatorname{sen} x}} \cos x \, dx$ R. $\sqrt{3 + \operatorname{sen} x} \sqrt{2 - \operatorname{sen} x} + 5 \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{3 + \operatorname{sen} x}{5}} + C$
18. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 2x + 4}}$ R. $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - 2}{16x} - \frac{3x}{32(x - 4 + 2\sqrt{x^2 - 2x + 4})} + \ln \left| \frac{x - 4 + 2\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x} \right| + C$
19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$ R. $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctan} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x}{\sqrt{3}} \right) + C$
20. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ R. $2 \cdot \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C$
21. $\int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2} dx$ R. $-\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right| - \operatorname{arcsen} \left(\frac{2x+1}{2} \right) + C$
22. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$ R. $-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsen} \left(\frac{\sqrt{3}}{x-2} \right) + C$
23. $\int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx$ R. $\ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2} \right| + C$
24. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$ R. $\ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{x+2 + \sqrt{1+x+x^2}} \right| + C$
25. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ R. $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$

$$26. \int \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx \quad R. \frac{-2(\sqrt{x^2+x+1}-1)}{x} + \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}-1}{x - \sqrt{1+x+x^2}+1} \right| + C$$

$$27. \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}} dx \quad R. \frac{2x-1}{4} \sqrt{x^2-x+1} + \frac{19}{8} \ln |2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}| + C$$

$$28. \int \frac{x+2}{(x-1)\sqrt{x^2+1}} dx \quad R. \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{x-1} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}} \right| + C$$

$$29. \int \frac{dx}{(\cos x + \sin x) \sqrt{1 + \frac{\sin(2x)}{2}}} \quad R. \ln \left| \frac{\tan x - \sqrt{\sec^2 x + \tan x}}{\tan x + 2 + \sqrt{\sec^2 x + \tan x}} \right| + C$$

$$30. \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x - 4}} \quad R. \frac{1}{2} \arcsen \left(\frac{e^x - 2}{e^x \sqrt{2}} \right) + C$$

$$31. \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{5x^2 - 8x + 4}} \quad R. -\frac{\sqrt{5x^2 - 8x + 4} (4 - 3x)}{2(x-1)^2} + \ln \left| \frac{\sqrt{5x^2 - 8x + 4} + x}{x-1} \right| + C$$

$$32. \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+x-6}} \quad R. -\frac{1}{4} \arcsen \left(\frac{11-3x}{4x-4} \right) + \frac{1}{2\sqrt{6}} \arcsen \left(\frac{x+13}{5x+5} \right) + C$$

$$33. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x}+1)^2} dx \quad R. \frac{3}{2} x^{2/3} - 6x^{1/3} + \frac{3}{x^{1/3}+1} + 9 \ln |x^{1/3} + 1| + C$$

$$34. \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)^{1/2}}{\sqrt[3]{x}} dx \quad R. \frac{6}{5} (x^{1/3}+1)^{5/2} - 2(x^{1/3}+1)^{3/2} + C$$

$$35. \int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \quad R. \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

$$36. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})} \quad R. 3 \arctan x + C$$

$$37. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad R. -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3} (x^2+2) + C$$

$$38. \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{3/2}} \quad R. -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$39. \int \sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3} dx \quad R. \frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{7/4} + C$$

$$40. \int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx \quad R. \frac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{3/2}}{5} + C$$

$$41. \int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx \quad R. \frac{5x^3-3}{40}(1+x^3)^{5/3} + C$$

$$42. \int \frac{\sqrt{1+x^{1/3}}}{x^{2/3}} dx \quad R. 2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2} + C$$

$$43. \int \sqrt[3]{x}(2+\sqrt[3]{x^2})^{1/4} dx \quad R. \frac{(2+x^{2/3})^{5/4}}{15}(10x^{2/3}-16) + C$$

$$44. \int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{1/3}} \quad R. -\frac{(1+x^3)^{2/3}}{2x^2} + C$$

$$45. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} \quad R. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x} \right| + \frac{1}{2} \arctan \left(\sqrt[4]{\frac{1+x^4}{x^4}} \right) + C$$

$$46. \int \frac{x^5+2x^2}{(1+x^3)^{3/2}} dx \quad R. \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} - \frac{2}{3\sqrt{1+x^3}} + C$$

$$47. \int \frac{dx}{x^5(25-x^5)^{1/5}} \quad R. -\frac{1}{100} \left(\frac{25-x^5}{x^5} \right)^{4/5} + C$$

$$48. \int e^{7x}(1-e^{3x})^{5/4} dx \quad R. -\frac{4}{3} \left[\frac{1}{9}(1-e^{3x})^{1/4} - \frac{2}{13}(1-e^{3x})^{13/4} + \frac{1}{17}(1-e^{3x})^{17/4} \right] + C$$

$$49. \int \frac{\cos x \operatorname{sen}^7 x \, dx}{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^4 x)^{3/2}} \quad R. \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\operatorname{sen}^4 x} + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^4 x}} \right) + C$$

$$50. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{8x^3+27}} \quad R. \frac{1}{320}(8x^3+27)^{5/9} - \frac{27}{128}(8x^3+27)^{2/9} + C$$

$$51. \int \frac{dx}{x^7(x^{-3}+1)^{4/3}} \quad R. -\frac{1}{2} \left(\frac{1+x^3}{x^3} \right)^{2/3} - \frac{x}{(1+x^3)^{1/3}} + C$$

1.8 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES TRIGONOMÉTRICAS

En general, las funciones que contienen combinaciones de funciones trigonométricas no son integrables por medio de procedimientos elementales. Veremos algunos casos en los cuales si es posible la integración.

1.8.1 INTEGRALES DE LA FORMA: $\int R(\cos x; \sin x) dx$

En este caso, R es una función racional que contiene senos y cosenos. Para transformarla en una función racional de variable z , se utiliza la **sustitución universal**

$$z = \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \arctan z$$

En consecuencia,

$$dx = \frac{2 dz}{1 + z^2}, \quad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \quad \text{y} \quad \sin x = \frac{2z}{1 + z^2}$$

De esta manera, el integrando, que es una función racional que contiene senos y cosenos, se transforma en una función racional de variable z .

Ejemplo 87. Calcule $I = \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$.

Solución

Si hacemos $z = \tan \frac{x}{2}$, entonces

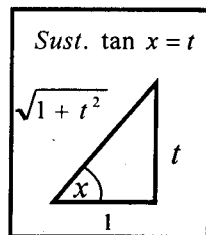
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2 dz}{1 + z^2}}{\frac{1 - z^2}{1 + z^2} + \frac{4z}{1 + z^2} + 3} = \int \frac{dz}{z^2 + 2z + 2} = \int \frac{dz}{(z + 1)^2 + 1} \\ &= \arctan(1 + z) + C = \arctan\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Observación 9. La "sustitución universal" ofrece la posibilidad de integrar cualquier función racional de $\sin x$ y $\cos x$. Sin embargo, en la práctica, conduce a menudo a funciones racionales demasiado complicadas. Por esta razón, en algunos casos, es preferible usar la **sustitución auxiliar**

$$t = \tan x \quad (*)$$

Con esta sustitución se tiene

$$dx = \frac{dt}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$



Esta sustitución (*) debe ser usada cuando la función racional trigonométrica tiene la forma

i) $\int R(\sin^k x; \cos^n x) dx$, donde k y n son números enteros pares.

ii) $\int R(\tan x) dx$

Ejemplo 88. Calcule $J = \int \frac{dx}{3 + \cos^2 x}$.

Solución

Considerando la observación anterior, usamos la sustitución auxiliar $t = \tan x$. De esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3 + \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3t^2 + 4} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3} \tan x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

En este ejemplo, si utilizamos la sustitución universal $z = \tan \frac{x}{2}$, obtenemos

$$J = \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{3 + \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2} = \int \frac{2(1+z^2)dz}{4(z^4 + z^2 + 1)}$$

y es evidente que esta última integral ofrece mayores dificultades.

Ejemplo 89. Calcule $I = \int \frac{\tan x}{2 + \tan^2 x} dx$.

Solución

Empleando la sustitución auxiliar $t = \tan x$, se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t dt}{(2+t^2)(1+t^2)} = \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{2+t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(2 + t^2) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t^2 + 1}{t^2 + 2}\right) + C = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x + 2}\right) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 90. Calcule $I = \int \frac{2 + 3 \cos x}{\cos x + 4 \cos^2 x} dx$.

Solución

Descomponiendo la integral, se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 + 3 \cos x}{\cos x(1 + 4 \cos x)} dx = \int \left(\frac{2}{\cos x} - \frac{5}{1 + 4 \cos x} \right) dx \\ &= \int 2 \sec x dx - \int \frac{5 dx}{1 + 4 \cos x} \\ &= 2 \ln |\sec x + \tan x| - \int \frac{5 dx}{1 + 4 \cos x} \end{aligned}$$

Para calcular la integral J , usamos la sustitución universal $z = \tan \frac{x}{2}$. Luego,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{10}{1+z^2} dz}{1 + \frac{4(1-z^2)}{1+z^2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3} dz}{5 - (\sqrt{3} z)^2} = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}z + \sqrt{5}}{\sqrt{3}z - \sqrt{5}} \right| + C \\ &= \sqrt{\frac{5}{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} - \sqrt{5}} \right| + C \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I = 2 \ln |\sec x + \tan x| - \sqrt{\frac{5}{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} - \sqrt{5}} \right| + C$$

Ejemplo 91. Calcule $I = \int \frac{dx}{3 - x + 2\sqrt{1-x^2}}$.

Solución

Usamos la sustitución trigonométrica $x = \sin \theta$. Entonces

$$I = \int \frac{\cos \theta d\theta}{3 - \sin \theta + 2 \cos \theta}$$

Ahora, usamos la sustitución universal $z = \tan \frac{\theta}{2}$. Luego,

$$I = \int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2} \cdot \frac{2 dz}{1+z^2}}{3 - \frac{2z}{1+z^2} + \frac{2(1-z^2)}{1+z^2}} = \int \frac{(2-2z^2)dz}{(z^2-2z+5)(z^2+1)}$$

Descomponiendo la última integral en fracciones simples, se obtiene

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left[\frac{1}{5} \left(\frac{2z+4}{z^2+1} \right) - \frac{1}{5} \left(\frac{(2z-2)+12}{z^2-2z+5} \right) \right] dz \\
 &= \frac{1}{5} \int \left[\frac{2z}{z^2+1} + \frac{4}{z^2+1} - \frac{2z-2}{z^2-2z+5} - \frac{12}{(z-1)^2+4} \right] dz \\
 &= \frac{1}{5} \left[\ln(z^2+1) + 4 \arctan z - \ln(z^2-2z+5) - 6 \arctan \left(\frac{z-1}{2} \right) \right] + C \\
 &= \frac{1}{5} \left[\ln \left(\frac{z^2+1}{z^2-2z+5} \right) + 4 \arctan z - 6 \arctan \left(\frac{z-1}{2} \right) \right] + C \\
 &= \frac{1}{5} \left[\ln \left(\frac{\tan^2 \frac{x}{2} + 1}{\tan^2 \frac{x}{2} - 2 \tan \frac{x}{2} + 5} \right) + 2x - 6 \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{2} \right) \right] + C
 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Calcule las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{4+3\cos x}$ R. $\frac{\sqrt{7}}{7} \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{7}} \right) + C$
2. $\int \frac{dx}{2+\sin x+3\cos x}$ R. $\frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{6}}{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{6}} \right| + C$
3. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$ R. $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} \right) + C$
4. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ R. $\frac{1}{2} \arctan \left(2 \tan \frac{x}{2} \right) + C$
5. $\int \frac{\sin x \, dx}{1+\sin x}$ R. $\frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + x + C$
6. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$ R. $\sqrt{2} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) - x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x + \tan^2 4x}$ R. $-\frac{1}{8} \left[\cot(4x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan 4x}{\sqrt{2}} \right) \right] + C$

8. $\int \frac{dx}{3 + \sin^2 x - \cos^2 x}$ R. $\frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C$
9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ R. $\arctan(\cos 2x) + C$
10. $\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$ R. $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13} \ln|2 \sin x + 3 \cos x| + C$
11. $\int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx$ R. $-\ln|\cos x - \sin x| + C$
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x}$ R. $\frac{1}{5} \ln|1 - 5 \cot x| + C$
13. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5} dx$ R. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 5}{\sin x + 1} \right| + C$
14. $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$ R. $\frac{1}{\sqrt{15}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3} \tan x}{\sqrt{5}}\right) + C$
15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x}$ R. $\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2 \tan x + 3 - \sqrt{13}}{2 \tan x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C$
16. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 5 \cos x + 6}$ R. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C$
17. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}$ R. $\arctan(2 \tan x + 1) + C$
18. $\int \frac{\sin^2 x - 2 \cos^2 x}{3 - \cos^2 x} dx$ R. $3x - \frac{8}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3} \tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$
19. $\int \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx$ R. $-\ln|\sec 2x + \tan 2x| - \sin 2x + C$
20. $\int \frac{1 + \tan x}{2 \sin x \cos x} dx$ R. $\frac{1}{2} \ln|\csc 2x - \cot 2x| + \frac{1}{2} \tan x + C$
21. $\int \frac{\sin x \tan x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx$ R. $\frac{1}{3} \ln|\tan^3 x - 1| + C$

ENTRETENIMIENTO

$$1. \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx \quad R. \arcsen \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x^6+1} \quad R. \frac{\arctan x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \left(\frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \right) + \frac{1}{6} \arctan(2x + \sqrt{3}) + \frac{1}{6} \arctan(2x - \sqrt{3}) + C$$

$$3. \int \left(\arcsen x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \quad R. x \arcsen x + C$$

$$4. \int \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} \cdot \frac{dx}{3x^2+11x+10} \quad R. 2 \arctan \sqrt{\frac{2x+3}{x+2}} + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{2x-\sqrt{x+4}}} \quad R. 2\sqrt{x+4} + 2\sqrt{2x} + 4\sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{x+4} + 4\sqrt{2}}{x-4} \right| + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt[3]{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2} \quad R. 3 \arctan x + \frac{3\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} + C$$

$$7. \int e^x (\cot x + \ln \sen x) dx \quad R. e^x \ln |\sen x| + C$$

$$8. \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad R. \frac{x^4}{4(1-x^4)} + \frac{1}{4} \ln |1-x^4| + C$$

$$9. \int \frac{6e^{4x}}{1-e^x} dx \quad R. -2e^{3x} - 3e^{2x} - 6e^x - 6 \ln |e^x - 1| + C$$

$$10. \int \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} dx \quad R. a \arcsen \frac{x}{a} - 2\sqrt{a} \sqrt{a-x} - \sqrt{a-x\sqrt{x}} + C$$

$$11. \int \frac{\sen x + \sen 2x + \dots + \sen(nx)}{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos(nx)} dx \quad R. -\frac{2}{n+1} \ln \left| \cos \left(\frac{n+1}{2} x \right) \right| + C$$

$$12. \int \sqrt{4+e^x} dx \quad R. 2\sqrt{4+e^{2x}} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{4+e^x} - 2}{\sqrt{4+e^x} + 2} \right| + C$$

$$13. \int \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x}(4 - 3x^2)\sqrt{3x^2 + x - 4}} dx \quad R. \ln \left| \frac{\sqrt{3x^2 + x - 4} + \sqrt{x}}{\sqrt{3x^2 - 4}} \right| + C$$

Sugerencia: hacer $\tan \theta = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^2 - 4}}$

$$14. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^3 + \sqrt{(1 + x^3)^3}}} \quad R. \frac{4}{3} \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^3}} + C$$

$$15. \int \sqrt{\frac{2 + 3x}{x - 3}} dx \quad R. \sqrt{3x^2 - 7x - 6} + \frac{11}{2\sqrt{3}} \ln \left| x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x - 2} \right| + C$$

$$16. \int \frac{(x + 1)dx}{(2x + x^2)\sqrt{2x + x^2}} \quad R. -\frac{1}{\sqrt{2x + x^2}} + C$$

$$17. \int \frac{2^x}{1 - 4^x} dx \quad R. \frac{1}{\ln 4} \ln \left| \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x} \right| + C$$

$$18. \int \frac{x - \sqrt[3]{x - 2}}{x^2 - \sqrt[3]{(x - 2)^2}} dx$$

$$R. \frac{1}{4} \ln |\sqrt[3]{x - 2} + 1| + \frac{3}{8} \ln |(x - 2)^{2/3} - (x - 2)^{1/3} + 2| - \frac{1}{4\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x - 2} - 1}{\sqrt{7}} \right) + C$$

$$19. \int \frac{(4 + x^2)^{1/2}}{5 + (4 + x^2)^{1/2}} dx$$

$$R. x - 5 \ln |\sqrt{4 + x^2} + x| - \frac{25}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3} \tan \left(\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right)}{\sqrt{7} + \sqrt{3} \tan \left(\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right)} \right| + C$$

$$20. \int e^{\sqrt[4]{x}} dx \quad R. e^{\sqrt[4]{x}} |4x^{3/4} - 12x^{1/2} + 24x^{1/4}| + C$$

$$21. \int \frac{1}{x^3} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx \quad R. \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} - \operatorname{sen} \frac{1}{x} + C$$

$$22. \int \sqrt{\frac{x}{x - a}} dx \quad R. \sqrt{x(x - a)} + a \ln |\sqrt{x} + \sqrt{x - a}| + C$$

$$23. \int \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}} dx \quad R. \frac{1}{2} \ln |e^{4x} - 1| - x + C$$

$$24. \int \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$R. -\sqrt{4x^2 - 12x + 8} - \frac{1}{8}(2x - 3)\sqrt{4x^2 - 12x + 8} - \frac{7}{8} \ln |2x - 3 + \sqrt{4x^2 - 12x + 8}| + C$$

$$25. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

$$R. \sqrt{2} \ln \left| \sec \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$26. \int \frac{\arcsen \sqrt{2x}}{\sqrt{1-2x}} dx$$

$$R. \sqrt{2x} - (\arcsen \sqrt{2x})(\sqrt{1-2x}) + C$$

$$27. \int \frac{4^x + 1}{2^x + 1} dx$$

$$R. x - 2 \ln |2^x + 1| + C$$

$$28. \int \sqrt{\frac{m+x}{x}} dx$$

$$R. \sqrt{mx + x^2} + m \ln(\sqrt{x} + \sqrt{m+x}) + C$$

$$29. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} \arcsen x dx$$

$$R. -\frac{(1-x^2)^{3/2} \arcsen x}{3x^3} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\ln x}{3} + C$$

$$30. \int \frac{\sec^2 x dx}{a + b \cos^2 x}$$

$$R. \left(\frac{a+b}{ab^2}\right)^{1/2} \arctan\left(\frac{\sqrt{a} \tan x}{\sqrt{a+b}}\right) - \frac{x}{b} + C$$

$$31. \int \frac{2a+x}{a+x} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$$

$$R. \sqrt{a^2 - x^2} - 2a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + C$$

$$32. \int \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}} dx$$

$$R. \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right] + C$$

$$33. \int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}} \quad (\text{Sug. } u = x + \frac{1}{x})$$

$$R. \frac{1}{2} \cosh^{-1} \left(\frac{2x^2+3}{\sqrt{5}} \right) + \tanh^{-1} \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} \tan \left(\frac{\operatorname{arcsec}(2x^2+3)}{2} \right) \right] + C$$

$$34. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 - x^3}} dx$$

$$R. \frac{2}{3} \arcsen \left(\frac{x^{3/2}}{a^{3/2}} \right) + C$$

$$35. \int \sqrt{\frac{4-x}{2+x}} dx$$

$$R. 3 \arccos \left(\frac{1-x}{3} \right) + 3\sqrt{x^2 - 2x + 8} + C$$

36. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{1+3x+3x^2}}$ (Sugerencia: $u = \frac{x}{1+x}$ y usar binomios)
 R. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x + \sqrt[3]{1+3x+3x^2}}{x} \right| - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(1+3x+3x^2)^{3/2}}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{1+3x+3x^2}}{x} + 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{1+3x+3x^2} - x}{\sqrt{3}x} \right) + C$
37. $\int \sec x \sec 2x dx$ R. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \sin x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C$
38. $\int \sqrt{x^2 + x + 2 + 2\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}} dx$
 R. $\frac{2}{3} (x+1)^{3/2} + \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right] + C$
39. $\int \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx$ R. $\sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{e^x-1}{2}} + C$
40. $\int \frac{\sec x \sqrt{\sec 2x}}{\arcsen(\tan x)} dx$ R. $\ln |\arcsen(\tan x)| + C$
41. $\int \sqrt{\frac{1 - \cos x}{\cos a - \cos x}} dx, 0 < a < x < \pi$ R. $-2 \arcsen \left(\frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \right) + C$
42. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx$ R. $\frac{3}{10} (2e^x - 3)(1 + e^x)^{2/3} + C$
43. $\int \frac{dx}{(\cos^2 x + 4 \sin x - 5) \cos x}$
 R. $\ln |(1 - \sin x)^{1/2} (1 + \sin x)^{-1/8} (2 - \sin x)^{-4/9}| + \frac{1}{6 - 3 \sin x} + C$
44. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{2 + \sin x}}$ R. $\ln |\sqrt{1 + \sin x}| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2 + \sin x}}{\sqrt{3} - \sqrt{2 + \sin x}} \right| + C$
45. $\int \frac{\tan x dx}{(\sec^{999} x + 1)^2}$
 R. $\ln |\sec x| - \frac{1}{999} \ln |\sec^{999} x + 1| + \frac{1}{999(\sec^{999} x + 1)} + C$

$$46. \int \frac{dx}{x^4 + a^2 x^2 + a^4}$$

$$R. \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{x^2 + ax + a^2}{x^2 - ax + a^2} \right| + \frac{1}{2a^3 \sqrt{3}} \arctan \left(\frac{a\sqrt{3} x}{a^2 - x^2} \right) + C$$

47. Determine un polinomio cuadrático $P(x)$ tal que $P(0) = 1$ y $P'(0) = 0$, de modo que $\int \frac{P(x)dx}{x^3(1-x)^2}$ sea una función racional. $R. P(x) = -3x^2 + 1$

$$48. \int x^{17} \ln(x^2) dx$$

$$R. 2x^{18} \left(\frac{\ln x}{18} - \frac{1}{324} \right) + C$$

$$49. \int \tan(\ln x) dx$$

$$R. x - 2 \arctan x + C$$

$$50. \int \sqrt{1 - \cos x} dx$$

$$R. -2\sqrt{1 + \cos x} + C$$

$$51. \int \frac{e^a da}{1 + x^2}$$

$$R. \frac{1}{1 + x^2} e^a + C$$

$$52. \int \sinh^{-1} \frac{x}{a} dx$$

$$R. x \sinh^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2} + C$$

$$53. \int \tanh^{-1} \frac{x}{a} dx$$

$$R. x \tanh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 - x^2) + C$$

$$54. \int \frac{x e^{ax} dx}{(1 + ax)^2}$$

$$R. \frac{e^{ax}}{a^2(1 + ax)} + C$$

$$55. \int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx$$

$$R. \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$56. \int x^2 \arctan \frac{x}{a} dx$$

$$R. \frac{x^3}{3} \arctan \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$57. \int \frac{\arctan \frac{x}{a}}{x^2} dx$$

$$R. -\frac{1}{x} \arctan \frac{x}{a} + \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2} + C$$

$$58. \int \coth^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) dx$$

$$R. x \coth^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(x^2 - a^2) + C$$

$$59. \int \frac{\arccos \left(\frac{x}{a} \right) dx}{x^2}$$

$$R. -\frac{1}{x} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C$$

$$60. \int (x + \sqrt{x^2 + 1})^{10} dx \quad R. \frac{1}{2} \left[\frac{u^{11}}{11} + \frac{u^9}{9} \right] + C, u = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$61. \int \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)}{5 + \operatorname{sen} 2x} dx \quad R. \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} \right) + C$$

$$62. \int \frac{dx}{(x^2 \cos^2 a + x \operatorname{sen} 2a + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad R. \frac{1}{\cos^3 a} \cdot \frac{x \cos a + \operatorname{sen} a}{\sqrt{x^2 \cos^2 a + x \operatorname{sen} 2a + 1}} + C$$

$$63. \int \operatorname{sech}^5 x dx \quad R. \frac{1}{4} \operatorname{sech}^3 x \tanh x + \frac{3}{8} [\operatorname{sech} x \tanh x + \operatorname{arcsen}(\tanh x)] + C$$

$$64. \int (\tan x + \sec x)^{20} \sec^2 x dx$$

$$65. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} \quad R. \frac{4}{3} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + C$$

$$66. \int \frac{(\cos 2x - 3) dx}{\cos^4 x \sqrt{4 - \cot^2 x}} \quad R. -\frac{1}{3} \tan x (2 + \tan^2 x) \sqrt{4 - \cot^2 x} + C$$

$$67. \int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6} dx \quad R. \ln(x + \sqrt{1+x})^2 - \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5x^5} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

$$68. \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^3(2x)}}{\operatorname{sen}^5 x} dx \quad R. -\frac{4\sqrt{2}}{5} \sqrt{\cot^5 x} + C$$

Sugerencia: hacer $u = \cot x$

$$69. \int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}} dx \quad R. -\frac{(1+x^8)^{3/2}}{12x^{12}} + C$$

$$70. \int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{14} x}} dx \quad R. \frac{3}{55} \sqrt[3]{\tan^5 x} (5 \tan^2 x + 11) + C$$

$$71. \int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} 2x}} \quad R. \frac{\sqrt{21}}{5} (\tan^2 x + 5) \sqrt{\tan x} + C$$

$$72. \int \frac{1 + \sin^2 x}{2 \cos^2 x \sqrt{\sin x}} dx \quad R. \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} + C$$

$$73. \int \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}{x-2} dx$$

$$74. \int \frac{e^x(x^2 - 8)}{(x-1)^2} dx \quad R. \frac{e^x(x+2)}{x-2} + C$$

$$75. \int e^{\sin x} (\sec^2 x - \csc^2 x + \csc x) dx \quad R. e^{\sin x} (\tan x + \cot x) + C$$

$$76. \int \frac{e^{\sinh^{-1} x} (x \sqrt{1+x^2} + 1)}{(1+x^2)^{3/2}} dx \quad R. \frac{x e^{\sinh^{-1} x}}{(1+x^2)^{3/2}} + C$$

$$77. \int \frac{x^2 \ln^2 x (1 + \ln x)}{1 + x^2 \ln^2 x} dx \quad R. x \ln x - \arctan(x \ln x) + C$$

$$78. \int \frac{e^x(x+1)}{-1 + e^{2x}x^2} dx \quad R. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{xe^x - 1}{xe^x + 1} \right| + C$$

$$79. \int \frac{e^{3x}x^2(x+1)}{1+x^2e^{2x}} dx \quad R. xe^x - \arctan(xe^x) + C$$

$$80. \int \frac{e^{\arctan x}}{(1 + e^{2 \arctan x})(1+x^2)} dx \quad R. \arctan(e^{\arctan x}) + C$$

$$81. \int \frac{\sin x + x \cos x}{(1 - x \sin x) \sqrt{-1 + x^2 - x^2 \cos^2 x}} dx \quad R. \frac{1 + x \sin x}{\sqrt{x^2 \sin^2 x - 1}} + C$$

$$82. \int \frac{x+20}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}} dx \quad R. \frac{2x+5}{\sqrt{5-4x-x^2}} + C$$

$$83. \int \frac{\ln 2(4^x + 2^{(1+x)})}{(2^x + 5)\sqrt{5 - 4 \cdot 2^x - 4^x}} dx \quad R. \frac{1 - 2^x}{\sqrt{5 - 4 \cdot 2^x - 4^x}} + \arcsen\left(\frac{2^x + 2}{3}\right) + C$$

$$84. \int e^{\sin x} (\csc^2 x - \sec^2 x - \csc x) dx \quad R. -e^{\sin x} (\cot x + \tan x) + C$$

INTEGRAL DEFINIDA

2.1 SUMATORIAS

Sean m y n dos números enteros tales que $m \leq n$ y f una función definida para cada $i \in \mathbb{Z}$, con $m \leq i \leq n$. El símbolo

$$\sum_{i=m}^n f(i)$$

representa la suma de los términos $f(m), f(m+1), \dots, f(n)$; esto es,

$$\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n)$$

La letra griega Σ (sigma) es llamada símbolo de la sumatoria, i es el índice o variable, m es el límite inferior y n es el límite superior.

Por ejemplo, si $f(i) = i^2$, entonces

$$\sum_{i=2}^5 f(i) = \sum_{i=2}^5 i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

De la misma manera, si $n > 1$,

$$\sum_{i=1}^n \text{sen}(ix) = \text{sen } x + \text{sen } 2x + \dots + \text{sen } nx$$

2.1.1 PROPIEDADES DE LA SUMATORIA

1. a) $\sum_{i=m}^n k = (n - m + 1)k$, k es constante

b) $\sum_{i=1}^n k = nk$, k es constante

2. $\sum_{i=m}^n k \cdot f(i) = k \sum_{i=m}^n f(i)$, k es constante

$$3. \sum_{i=m}^n [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=m}^n f(i) \pm \sum_{i=m}^n g(i) \quad (\text{Propiedad Distributiva})$$

$$4. \text{ a) } \sum_{i=m}^n [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(m-1) \quad (\text{Propiedad Telescópica})$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^n [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)$$

$$5. \text{ a) } \sum_{i=m}^n [f(i+1) - f(i-1)] = f(n+1) + f(n) - f(m) - f(m-1) \quad (\text{Propiedad Telescópica})$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^n [f(i+1) - f(i-1)] = f(n+1) + f(n) - f(1) - f(0)$$

Ejemplo 1. Calcule el valor de $\sum_{i=5}^{400} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1} + 4)$.

Solución

Por la propiedad 3, se tiene

$$\sum_{i=5}^{400} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1} + 4) = \sum_{i=5}^{400} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) + \sum_{i=5}^{400} 4$$

En la primera sumatoria, aplicando la propiedad 4-a para $f(i) = \sqrt{i}$, $m = 5$ y $n = 400$, se obtiene

$$\sum_{i=5}^{400} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) = (\sqrt{400} - \sqrt{4}) = 18$$

En la segunda sumatoria, aplicando la propiedad 1-a para $k = 4$, $m = 5$ y $n = 400$, se tiene

$$\sum_{i=5}^{400} 4 = (400 - 5 + 1)4 = 1584$$

Por tanto,

$$\sum_{i=5}^{400} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1} + 4) = \sum_{i=5}^{400} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) + \sum_{i=5}^{400} 4 = 18 + 1584 = 1602$$

Ejemplo 2. Calcule una fórmula para $\sum_{i=1}^n [(i+1)^2 - (i-1)^2]$.

Solución

Si $f(i) = i^2$, entonces $f(i+1) = (i+1)^2$ y $f(i-1) = (i-1)^2$. Por tanto, por la propiedad telescópica 4-b, se tiene:

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^2 - (i-1)^2] = (n+1)^2 + n^2 - 1^2 - 0^2 = 2n^2 + 2n \quad \delta$$

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^2 - (i-1)^2] = 2n(n+1) \quad (\alpha)$$

Como $(i+1)^2 - (i-1)^2 = 4i$, reemplazando esta igualdad en (α) se obtiene

$$\sum_{i=1}^n 4i = 2n(n+1)$$

De esta parte se deduce una fórmula muy conocida:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 3. Usando las propiedades de la sumatoria, demuestre que:

$$a) \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$c) \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$d) \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

Solución

a) Ver ejemplo 2.

b) Consideramos $f(i) = i^3$. Usando la propiedad 5-b, se tiene

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - (i-1)^3] = (n+1)^3 + n^3 - 1^3 - 0^3$$

Simplificando en ambos lados y luego aplicando las propiedades 3-b, 2-b y 1-b de la sumatoria, obtenemos

$$\sum_{i=1}^n (6i^2 + 2) = 2n^3 + 3n^2 + 3n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n 6i^2 + \sum_{i=1}^n 2 = 2n^3 + 3n^2 + 3n$$

$$\Leftrightarrow 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 2n = 2n^3 + 3n^2 + 3n \Leftrightarrow 6 \sum_{i=1}^n i^2 = 2n^3 + 3n^2 + n$$

Finalmente,

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) y d) Ejercicios. Sug. para c): considere $f(i) = i^4$ y use la prop. 4.

Ejemplo 4. Si $a > 0 \wedge a \neq 1$, demuestre que $\sum_{i=1}^n a^i = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1}$.

Solución

Aplicando la propiedad 4-b a $f(i) = a^i$ y luego aplicando la propiedad 2, se tiene

$$\sum_{i=1}^n (a^i - a^{i-1}) = a^n - 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (a^i - \frac{a^i}{a}) = a^n - 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\frac{a-1}{a}) a^i = a^n - 1$$

Finalmente,

$$\sum_{i=1}^n a^i = \frac{a(a^n - 1)}{(a - 1)}$$

Ejemplo 5. Determine una fórmula para $\sum_{k=1}^n \sin kx$.

Solución

Para calcular la sumatoria de senos o cosenos, se considera como $f(i)$ la cofunción de la función que aparece en la sumatoria y se aplica la propiedad telescópica 5-b. En este caso, $f(k) = \cos kx$. Así, se tiene

$$\sum_{k=1}^n [\cos(k+1)x - \cos(k-1)x] = \cos(n+1)x + \cos nx - \cos x - 1$$

Utilizando las identidades trigonométricas para $\cos(a \pm b)$ y simplificando, se sigue

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-2 \sin x \sin kx) &= \cos(n+1)x + \cos nx - \cos x - 1 \\ -2 \sin x \sum_{k=1}^n \sin kx &= \cos(n+1)x + \cos nx - \cos x - 1 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = -\frac{\cos(n+1)x + \cos nx - \cos x - 1}{2 \sin x}$$

Ejemplo 6. Halle una fórmula para $\sum_{k=1}^n k k!$

Solución

Si $f(k) = (k+1)!$, por la propiedad 4-a, se tiene

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1$$

$$\sum_{k=1}^n [k!(k+1) - k!] = (n+1)! - 1$$

Finalmente,

$$\sum_{k=1}^n k k! = (n+1)! - 1$$

Ejemplo 7. Determine una fórmula para $\sum_{k=1}^n \frac{\tanh 19 kx}{\operatorname{sech} 19 kx}$.

Solución

$$\sum_{k=1}^n \frac{\tanh 19 kx}{\operatorname{sech} 19 kx} = \sum_{k=1}^n \sinh 19 kx$$

Se procede de manera similar a lo realizado en el ejemplo 5 para la función trigonométrica. Si $f(k) = \cosh 19 kx$, por la propiedad 5-a, se tiene

$$\sum_{k=1}^n [\cosh 19(k+1)x - \cosh 19(k-1)x] = \cosh 19(n+1)x + \cosh 19 nx - \cosh 19 x - 1$$

$$2 \sinh 19x \sum_{k=1}^n \sinh 19 kx = \cosh 19(n+1)x + \cosh 19 nx - \cosh 19 x - 1$$

Finalmente,

$$\sum_{k=1}^n \sinh 19 kx = \frac{\cosh 19(n+1)x + \cosh 19 nx - \cosh 19 x - 1}{2 \sinh 19 x}$$

Ejemplo 8. Halle una fórmula para $\beta = \sum_{k=1}^n b^k \operatorname{sen}(x + ky)$.

Solución

Aplicando la propiedad 4-a a $f(k) = b^k \operatorname{sen}(x + ky)$, se tiene

$$\sum_{k=1}^n [b^k \operatorname{sen}(x + ky) - b^{k-1} \operatorname{sen}(x + (k-1)y)] = \underbrace{b^n \operatorname{sen}(x + ny) - \operatorname{sen} x}_{\alpha}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n b^k \operatorname{sen}(x + ky)}_{\beta} - \frac{1}{b} \sum_{k=1}^n b^k \operatorname{sen}(x + ky - y) = \alpha$$

$$\beta - \frac{1}{b} \sum_{k=1}^n b^k [\operatorname{sen}(x + ky) \cos y - \operatorname{sen} y \cos(x + ky)] = \alpha$$

$$\left(1 - \frac{\cos y}{b}\right) \beta + \frac{\operatorname{sen} y}{b} \underbrace{\sum_{k=1}^n b^k \cos(x + ky)}_{\delta} = \alpha \quad (1)$$

Para determinar (δ) , aplicamos el criterio inicial.

$$\sum_{k=1}^n [b^k \cos(x + ky) - b^{k-1} \cos(x + (k-1)y)] = b^n \cos(x + ny) - \cos x$$

$$\delta - \frac{1}{b} \sum_{k=1}^n b^k [\cos(x + ky) \cos y + \operatorname{sen}(x + ky) \operatorname{sen} y] = b^n \cos(x + ny) - \cos x$$

Luego,

$$\delta = \frac{\operatorname{sen} y}{b - \cos y} (\alpha) + \frac{b}{b - \cos y} [b^n \cos(x + ny) - \cos x] \quad (2)$$

Finalmente, reemplazando (2) en (1) y efectuando las operaciones correspondientes, obtenemos

$$\beta = \frac{b(b - \cos y)}{b^2 - 2b \cos y + 1} \left[b^n \operatorname{sen}(x + ny) - \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} y (b^n \cos(x + ny) - \cos x)}{b - \cos y} \right]$$

Ejemplo 9. Determine una fórmula para $\sum_{k=1}^n \ln(k+1)$.

Solución

Desarrollando la sumatoria y aplicando las propiedades del logaritmo, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln(k+1) &= \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n + \ln(n+1) \\ &= \ln[2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)] \\ &= \ln[(n+1)!] \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Determine una fórmula para cada una de las siguientes sumatorias.

$$1. \sum_{i=1}^n (\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}) \quad R. \sqrt{2n+1} - 1$$

$$2. \sum_{k=1}^{100} \ln\left(\frac{k}{k+2}\right) \quad R. -\ln(5151)$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{4}{(4k-3)(4k+1)} \quad R. \frac{4n}{4n+1}$$

Sugerencia: descomponer en fracciones parciales a: $\frac{4}{(4k-3)(4k+1)}$

$$4. \sum_{k=1}^n \frac{2^k + 3^k}{6^k} \quad R. \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} - \frac{1}{2^n}$$

$$5. \sum_{k=1}^n \frac{2^k + k(k+1)}{2^{k+1}(k^2+k)} \quad R. 1 - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$6. \sum_{k=1}^n \frac{e^k + 2}{3^k} \quad R. \frac{e}{3-e} \cdot \frac{3^n - e^n}{3^n} + (1 - 3^{-n})$$

$$7. \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} \quad R. 3 - \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$8. \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k}} \quad R. \frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n+1}}$$

$$9. \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)(k^2 + 5k + 6)} \quad R. \frac{n^2 + 3n + 3}{2(n+2)(n+3)}$$

$$10. \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+x)(k+x+1)(k+x+2)} \quad R. \frac{n(2x+n+3)}{2(n+x+1)(n+x+2)(x+2)(x+1)}$$

$$11. \sum_{k=1}^n \frac{\ln \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k (1+k) \right]}{\ln k^k \{\ln(k+1)^{k+1}\}} \quad R. \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$$

$$12. \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \quad R. \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$13. \sum_{k=1}^n \cos(3kx) \quad R. \frac{\sin 3(n+1)x + \sin 3nx - \sin 3x}{2 \sin 3x}$$

$$14. \sum_{k=1}^n \left(\frac{25}{10^k} - \frac{6}{100^k} \right) \quad R. \frac{269}{999} \left(\frac{10^{2n} - 1}{10^{2n}} \right)$$

$$15. \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k^2 + 6k + 4} \quad R. \frac{n}{4(n+2)}$$

$$16. \sum_{k=1}^{100} \sin^{2k}(2x) \quad R. \tan^2(2x) (1 - \sin^{200} 2x)$$

$$17. \sum_{k=1}^{100} \frac{k}{5^k} \quad R. \frac{5}{16} - \frac{1}{16(5^{99})} - \frac{1}{5^{98}}$$

18. $\sum_{k=1}^n k x^{k-1}$ R. $\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$
19. $\sum_{k=1}^n 5^k \operatorname{sen}(5k - x)$
 R. $\frac{5[(5 - \cos 5)(5^n \operatorname{sen}(5n - x) + \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} 5(5^n \cos(5n - x) - \cos x)]}{4(13 - 5 \cos 5)}$
20. $\sum_{k=1}^n \frac{16 \csc^5 kx}{\cot^5 kx \sec^9 kx}$
 R. $6n + \frac{4[\operatorname{sen}(2n+1)x + \operatorname{sen}(2nx) - \operatorname{sen} 2x]}{\operatorname{sen}(2x)} + \frac{[\operatorname{sen} 4(n+1)x + \operatorname{sen}(4nx) - \operatorname{sen} 4x]}{\operatorname{sen} 4x}$
21. $\sum_{k=1}^n \frac{e^k - [3 \operatorname{sen} a \cos a]^k}{3^k}$
 R. $\frac{e \left[\left(\frac{e}{3} \right)^n - 1 \right]}{e - 3} - \frac{\operatorname{sen} 2a[(\operatorname{sen} a \cos a)^n - 1]}{\operatorname{sen}(2a) - 2}$
22. $\sum_{k=1}^n \frac{10}{24 + 10k - 25k^2}$ R. $\frac{1}{5n+4} + \frac{1}{5n-1} - \frac{5}{4}$
23. $\sum_{k=1}^n k 2^k$ R. $(n-1)2^{n+1} + 2$
24. $\sum_{k=1}^n \cos^{2k} 3x$ R. $\cot^2 3x [1 - \cos^{2n}(3x)]$
25. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\log_a(2^{2k}) \log_a(2^{2k+2})}$ R. $\frac{1}{(\log_a 2)^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \right)$
26. $\sum_{k=1}^n [\sqrt{3+x}]^k$ R. $\frac{\sqrt{3+x}[(3+x)^{n/2} - 1]}{\sqrt{3+x} - 1}$

2.2 CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA POR SUMATORIAS

2.2.1 PARTICIÓN DE UN INTERVALO CERRADO

Definición 1. Sea $[a; b]$ un intervalo cerrado. Una partición del intervalo $[a; b]$ es el conjunto P de puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$; con $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$. Se denota con $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Observación 1

- i) Toda partición P de $[a; b]$ divide en n subintervalos al intervalo $[a; b]$.
- ii) La longitud de cada subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$, para $i = 1, 2, \dots, n$, se denota con $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Se verifica

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i x = b - a$$

- iii) Se llama norma o diámetro de la partición P al número

$$\|P\| = \max\{\Delta_i x \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

- iv) Cuando el intervalo $[a; b]$ se divide en n partes iguales, la longitud de cada subintervalo es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

En este caso, los extremos de cada subintervalo son

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \dots, \quad x_i = a + i\Delta x, \dots, \quad x_n = b$$

2.2.2 APROXIMACIÓN DEL ÁREA DE UNA REGIÓN POR ÁREAS DE RECTÁNGULOS

Sea $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa ($f(x) \geq 0$) en $[a; b]$. Sea R la región plana limitada por las gráficas de $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x (llamada **región bajo la gráfica de f de a hasta b**) (fig. 2.1).

Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una partición $[a; b]$. Por la continuidad de f en $[a; b]$, podemos elegir un conjunto de puntos u_1, u_2, \dots, u_n , de tal manera que $f(u_i)$ sea el valor mínimo de f en $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

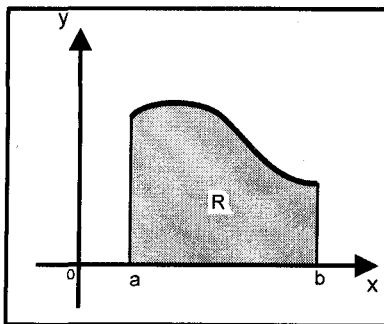


Fig. 2.1

Así, construimos n rectángulos cuyas bases son los subintervalos de P y cuyas respectivas alturas son $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$. Las áreas de estos rectángulos son $f(u_1)\Delta_1x, f(u_2)\Delta_2x, \dots, f(u_n)\Delta_nx$ respectivamente.

Los n rectángulos considerados forman el llamado **polígono rectangular inscrito** en R (fig. 2.2). El área de este polígono lo denotamos con $I(P)$, es decir,

$$I(P) = \sum_{i=1}^n f(u_i)\Delta_i x$$

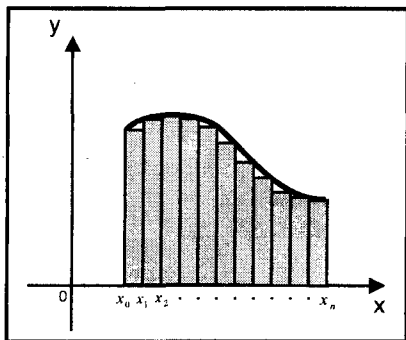


Fig. 2.2

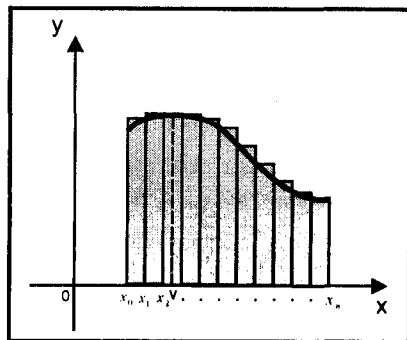


Fig. 2.3

De manera similar, elegimos v_1, v_2, \dots, v_n en los n subintervalos de P , de modo que $f(v_i)$ es el valor máximo de f en $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, y construimos los n rectángulos cuyas bases son los subintervalos de P y cuyas alturas respectivas son $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$.

El polígono rectangular formado por estos n rectángulos está circunscrito a la región R (fig. 2.3) y su área, denotada por $C(P)$, está dada por:

$$C(P) = \sum_{i=1}^n f(v_i)\Delta_i x$$

Dadas dos particiones P_1 y P_2 . Si $I(P_1)$ es el área del polígono inscrito y $C(P_2)$ es el área del polígono circunscrito, se verifica

$$I(P_1) \leq C(P_2) \text{ para toda partición } P_1 \text{ y } P_2 \text{ de } [a; b] \quad (I)$$

Sea L el conjunto de todas las áreas de los polígonos rectangulares inscritos en R , es decir,

$$L = \{I(P) / P \text{ es partición de } [a; b]\}$$

y U el conjunto de todas las áreas de los polígonos rectangulares circunscritos a R , esto es,

$$U = \{C(P) / P \text{ es partición de } [a; b]\}$$

Como cada número del conjunto L es menor o igual que cualquier número del conjunto U (por 1), entonces L es acotado superiormente y U es acotado inferiormente. Por lo tanto, existen

$$A_i = \sup(L) \text{ y } A_s = \inf(U)$$

Por definición de ínfimo y de supremo, se verifica

$$I(P) \leq A_i \leq A_s \leq C(P), \text{ de donde } A_i \leq A_s$$

Por lo tanto, el área A de la región R (fig. 2.1), si existe, debe estar entre A_i y A_s , es decir, $A_i \leq A \leq A_s$

Se demuestra más adelante que $A_i = A_s$. Luego, se puede definir el área A de la región R como

$$A = A_i = A_s$$

También se demuestra que si t_1, t_2, \dots, t_n son puntos elegidos en los n subintervalos, es decir, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$; entonces

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta_i x \right) \quad (\text{II})$$

Observación 2

i) Considerando la parte (iv) de la observación 1, si cada t_i es el extremo derecho de cada subintervalo ($t_i = a + i\Delta x$, $i = 1, 2, \dots, n$) y teniendo en cuenta que $\|P\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$, entonces (II) puede ser escrito como:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x \right) \quad \text{ó} \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\Delta x \sum_{i=1}^n f(t_i) \right) u^2 \quad \dots \quad (\text{III})$$

$$\text{donde } \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad t_i = a + i\Delta x, \quad i = 1, \dots, n$$

(Esta fórmula es un caso particular).

ii) Si cada t_i es el extremo izquierdo de cada subintervalo, entonces $t_i = a + (i-1)\Delta x$, $i = 1, \dots, n$

Ejemplo 10. Por rectángulos inscritos, calcule el área de la región R limitada por las gráficas de $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 3$ y el eje x .

Solución

La gráfica de la región se muestra en la Fig. 2.4. En este caso, $f(x) = x + 1$, $a = 0$ y $b = 3$. Como f es creciente en $[0; 3]$, f presenta mínimo en el extremo izquierdo de cada subintervalo, es decir,

$$t_i = a + (i-1)\Delta x, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{donde } \Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

Entonces $t_i = 0 + (i-1)\frac{3}{n} = \frac{3}{n}i - \frac{3}{n}$. y $f(t_i) = t_i + 1 = \frac{3}{n}i + 1 - \frac{3}{n}$.

Por tanto, utilizando la fórmula dada en la observación 2 y la sumatoria de i , tenemos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{3}{n}i + \left(1 - \frac{3}{n}\right) \right] \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{n} \left[\sum_{i=1}^n \frac{3}{n}i + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{3}{n}\right) \right] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{n} \left[\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n i + \left(1 - \frac{3}{n}\right) \sum_{i=1}^n 1 \right] \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{n} \left[\frac{3}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \left(1 - \frac{3}{n}\right)n \right] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 \left[\frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{3}{n}\right) \right] \right\} = \frac{15}{2} u^2 \end{aligned}$$

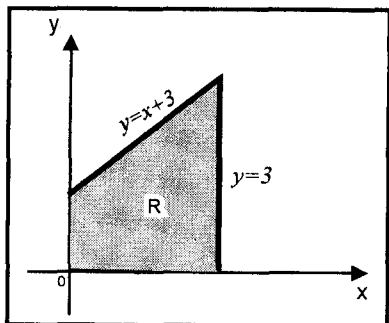


Fig. 2.4

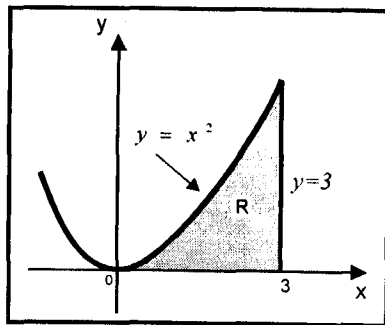


Fig. 2.5

Ejemplo 11. Por rectángulos circunscritos, calcule el área de la región R limitada por las gráficas de $y = x^2$, $x = 3$ y el eje x .

Solución

El gráfico de la región R se muestra en la fig. 2.5. A partir del gráfico, se deduce que $a = 0$, $b = 3$ y, por tanto, $\Delta x = 3/n$.

Como f es creciente en $[0; 3]$, f tiene valor máximo en el extremo derecho de cada intervalo. Así,

$$t_i = a + i\Delta x \text{ ó } t_i = \frac{3}{n}i \text{ y } f(t_i) = \frac{9}{n^2}i^2$$

Luego,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \frac{9}{n^2} i^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{27}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] = 9 u^2 \end{aligned}$$

En los ejemplos que siguen, no se tendrá en cuenta los rectángulos inscritos ni los rectángulos circunscritos. Los puntos t_i serán considerados como los extremos derechos de los subintervalos.

Ejemplo 12. Calcule el área de la región R limitada por las gráficas de $y = 3 + x + x^3$, $x = -1$, $x = 2$ y el eje x .

Solución

$$a = -1, b = 2, f(x) = 3 + x + x^3$$

$$\Delta x = \frac{3}{n}, \quad t_i = -1 + \frac{3}{n}i \quad \text{y} \quad f(t_i) = 1 + \frac{12}{n}i - \frac{27}{n^2}i^2 + \frac{27}{n^3}i^3$$

Para calcular el área de la región (Fig. 2.6), se tendrá en cuenta la sumatoria de i , de i^2 y de i^3 .

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{12}{n}i - \frac{27}{n^2}i^2 + \frac{27}{n^3}i^3 \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{n} \left\{ n + \frac{12}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{27}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 \left\{ 1 + 6 \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + \frac{27}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \right\} \right] = \frac{57}{4} u^2 \end{aligned}$$

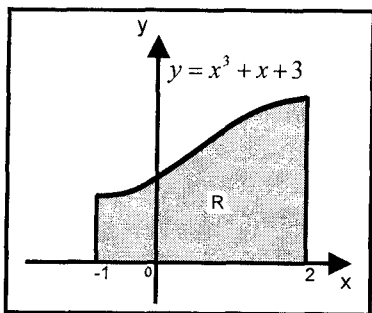


Fig. 2.6

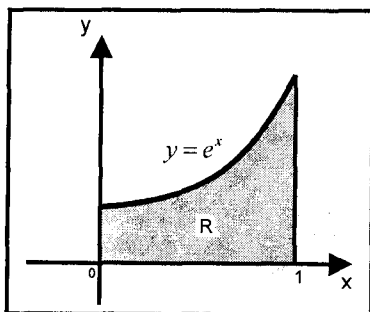


Fig. 2.7

Ejemplo 13. Calcule el área de la región R limitada por las gráficas de $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$ y el eje x .

Solución

La región se muestra en la Fig. 2.7. La longitud de cada subintervalo es $\Delta x = \frac{1}{n}$,

$$t_i = \frac{1}{n}i \quad \text{y} \quad f(t_i) = e^{\frac{1}{n}i}$$

En este caso, usaremos el resultado obtenido en el ejemplo 4 para $a = e^{1/n}$. Así,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{1}{n}i} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{1/n}[(e^{1/n})^n - 1]}{e^{1/n} - 1} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n}}(e - 1)}{e^{1/n} - 1} \right] = (e - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{n} e^{1/n}}{e^{1/n} - 1} \right] = (e - 1) u^2 \quad (*) \end{aligned}$$

(*) Se hace el cambio de variable $x = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} e^{1/n}}{e^{1/n} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{e^x - 1} = 1$.

(Al aplicar la Regla de L'Hôpital al último límite)

Ejemplo 14. Calcule el área de la región bajo la gráfica de $f(x) = \sin x$ en $[0; \pi/2]$.

Solución

La gráfica de la región se muestra en la Fig. 2.8. Así, tenemos

$$\Delta x = \frac{\pi}{2n}, \quad t_i = \frac{\pi}{2n} i \quad y$$

$$f(t_i) = \sin \frac{\pi}{2n} i$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi}{2n} i \right]$$

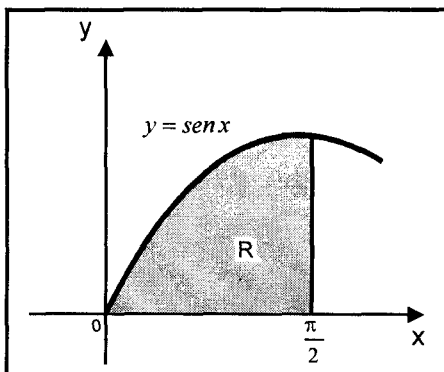


Fig. 2.8

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{2n} \left(\frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2n} \right) - \cos \left(n \frac{\pi}{2n} \right) - \cos \left((n+1) \frac{\pi}{2n} \right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{2n} \right)} \right) \right] \quad (**)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2n} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{\pi}{2}}{2 \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2n} \right)}{\left(\frac{\pi}{2n} \right)}} \right] = \left[\frac{1 + 1 - 0 - 0}{2(1)} \right] = 1 u^2$$

(**) Se usa el resultado del ejemplo 5 para $x = \pi/2n$.

Ejemplo 15. Calcule el área de la región bajo la curva $y = \sinh x$ en $[0; 1]$.

Solución

La región R se muestra en la fig. 2.9.

Se tiene

$$\Delta x = \frac{1}{n}, \quad t_i = \frac{1}{n}i \quad \text{y} \quad f(t_i) = \sinh\left(\frac{1}{n}i\right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sinh\left(\frac{1}{n}i\right) \right]$$

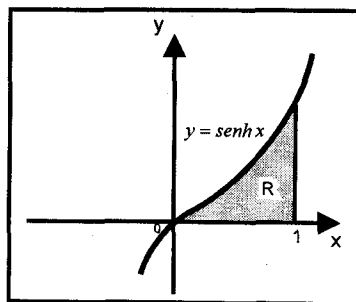


Fig. 2.9

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \frac{\cosh(n+1)\frac{1}{n} + \cosh\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) - \cosh\frac{1}{n} - 1}{2 \sinh\left(\frac{1}{n}\right)} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\cosh\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cosh 1 - \cosh\frac{1}{n} - 1}{2 \left(\frac{\sinh(1/n)}{1/n}\right)} \right] = \frac{2 \cosh(1) - 2}{2} = (\cosh(1) - 1)u^2$$

Ejemplo 16. Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, eje x , $y = 9$.

Solución

Para evitar la sumatoria de la raíz cuadrada, tomamos como variable independiente a la variable y , es decir, $f(y) = y^2/4$. La región está limitada por las curvas $f(y) = y^2/4$, $g(y) = 9$, las rectas $y = 0$ e $y = 6$ (fig. 2.10).

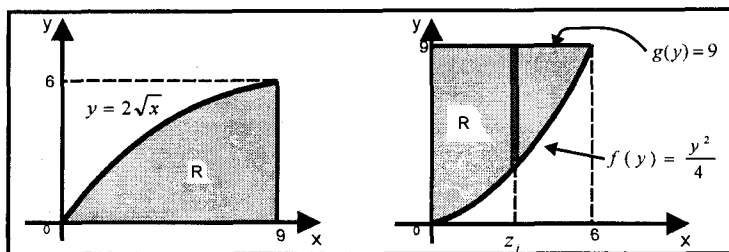


Fig. 2.10

El área del i -ésimo rectángulo es $[g(z_i) - f(z_i)]\Delta y$.

Por tanto, el área de la región está dada por

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta y \sum_{i=1}^n (g(z_i) - f(z_i)) \right],$$

donde $\Delta y = \frac{6}{n}$, $z_i = 0 + i\Delta y = \frac{6}{n}i$, $g(z_i) = 9$ y $f(z_i) = \frac{1}{4}\left(\frac{6}{n}i\right)^2 = \frac{9}{n^2}i^2$

Como $g(z_i) - f(z_i) = 9 - \frac{9}{n^2}i^2$, se tiene $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{6}{n} \sum_{i=1}^n \left(9 - \frac{9}{n^2}i^2 \right) \right] = 36 u^2$.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios siguientes, encuentre el área de la región limitada por las curvas dadas.

1. $y = (x - 1)^3$, $x = 3$, $x = 8$ y el eje x R. $2385/4 u^2$
2. $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$ y el eje x R. $8/3 u^2$
3. $y = 4 - x^2$ y el eje x R. $32/3 u^2$
4. $y = 4 - |x|$, $x = -4$, $x = 4$, el eje x R. $8 u^2$
5. $y = 2\sqrt{x}$, eje x , $x = 0$, $x = 4$ R. $32/3 u^2$
6. $y = x^3$, $x = -1$, $x = 1$, eje x R. $1/2 u^2$
7. $y = 12 - x^2$, eje x , $x = -3$, $x = -2$ R. $305/6 u^2$
8. $y = 2 - |x|$, eje x , $x = -2$, $x = 2$ R. $4 u^2$
9. $y = x^2$, $y = 4 - 3x^2$ R. $16/3 u^2$
10. $y = mx$, $m > 0$, eje x , $x = a$, $x = b$, con $0 < a < b$ R. $\frac{m(b^2 - a^2)}{2} u^2$
11. $y = x^2 - 2x - 1$, eje x , $x = 1$, $x = 4$ R. $\left(\frac{13\sqrt{2}}{3} - 4 \right) u^2$
12. $y = 3x - 3x^2 - \frac{4}{3}x^3$, eje x , $x = 0$, $x = 1$ R. $1/6 u^2$
13. $y = \cosh x$, $x = 0$, $x = 1$, eje x R. $\sinh(1) u^2$
14. $y = \cos x$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, eje x R. $2 u^2$
15. $4y = (x - 4)^2$, $4y = (x + 4)^2$, $4y = -(x - 4)^2$, $4y = -(x + 4)^2$ R. $64/3 u^2$
16. $y = 3x^2$, $y = -1 - 3x^2$, $x = 0$, $x = 3$ R. $57 u^2$

2.3 SUMA SUPERIOR Y SUMA INFERIOR

En esta sección y en las siguientes, hasta la sección 2.10, las funciones consideradas están definidas en un intervalo $I = [a; b]$, con $a < b$.

Definición 2. Si P_1 y P_2 son dos particiones de I , se dice que P_2 es un **refinamiento** de P_1 cuando $P_1 \subset P_2$. Se comprueba fácilmente que si P_2 es un refinamiento de P_1 , entonces $\|P_2\| \leq \|P_1\|$.

Definición 3. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en $I = [a; b]$ y $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de I . Con I_j denotamos al j -ésimo subintervalo de I , es decir, $I_j = [x_{j-1}; x_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Como f es acotada en I , existen m_j y M_j tales que

$$m_j = \inf\{f(x) / x \in I_j\}; \quad M_j = \sup\{f(x) / x \in I_j\}$$

Se cumple: $m_j \leq f(x) \leq M_j$, $\forall x \in I_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Definimos:

a) La **suma inferior** de f para P , que se designa con $\underline{S}(f; P)$, se define como

$$\underline{S}(f; P) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n m_j \Delta_j x$$

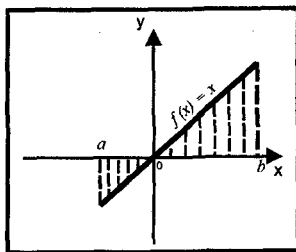
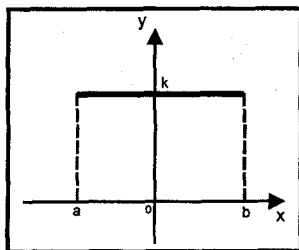
b) La **suma superior** de f para P , que se denota con $\bar{S}(f; P)$, se define como

$$\bar{S}(f; P) = \sum_{j=1}^n M_j \Delta_j x$$

Ejemplo 17. Sea $f(x) = k$ la función constante definida en $I = [a; b]$. La gráfica de la función se muestra en la fig. 2.11. Se tiene

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n k \Delta_j x = k \sum_{j=1}^n \Delta_j x = k(b - a), \text{ donde } k = \inf\{f(x) / x \in I_j\}$$

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n k \Delta_j x = k \sum_{j=1}^n \Delta_j x = k(b - a), \text{ donde } k = \sup\{f(x) / x \in I_j\}$$



Ejemplo 18. Si $f(x) = x$, $x \in I = [a; b]$, entonces

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n x_{j-1} \Delta_j x, \text{ donde } x_{j-1} = \inf\{f(x) / x \in I_j\}, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n x_j \Delta_j x, \text{ donde } x_j = \sup\{f(x) / x \in I_j\}, j = 1, 2, \dots, n$$

La gráfica de la función se muestra en la Fig. 2.12.

Ejemplo 19. Consideremos “la función de Dirichlet”

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}, x \in I = [a; b]$$

Para cualquier partición P se verifica que $m_j = 0$ y $M_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Luego,

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n 0 \cdot \Delta_j x = 0 \text{ y } \bar{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n 1 \cdot \Delta_j x = b - a$$

2.3.1 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LAS SUMAS SUPERIORES E INFERIORES

Las sumas superior e inferior poseen una interpretación geométrica simple.

En primer lugar, analicemos el significado del producto $h_j \Delta_j x$, donde h_j es m_j ó M_j y $\Delta_j x$ es la longitud del subintervalo $I_j = [x_{j-1}; x_j]$.

Si $h_j > 0$, entonces $h_j \Delta_j x$ es numéricamente igual al área del rectángulo de base I_j y altura h_j . Si $h_j = 0$, entonces $h_j \Delta_j x = 0$; y si $h_j < 0$, entonces $h_j \Delta_j x$ es numéricamente igual al opuesto del área del rectángulo de base I_j y altura $-h_j$.

Por esta razón, al número $h_j \Delta_j x$ lo denominaremos **área algebraica** del rectángulo cuya base es I_j y altura es $|h_j|$, es decir, el área algebraica es positiva si el rectángulo esta sobre el eje x y negativa, si está debajo de eje x .

En la sección 2.2.2 (figuras 2.2 y 2.3), vimos que cuando f es no negativa en I , $\underline{S}(f, P)$ y $\bar{S}(f, P)$ (que denotamos por $I(P)$ y $C(P)$) son, respectivamente, las áreas de los polígonos rectangulares inscrito y circunscrito a R , donde R es la región limitada por las gráficas de f , las rectas $x = a$, $x = b$ y del eje x .

En las figuras 2.13 y 2.14 se muestran, respectivamente, $\bar{S}(f, P)$ y $\underline{S}(f, P)$ para una función que no necesariamente es positiva.

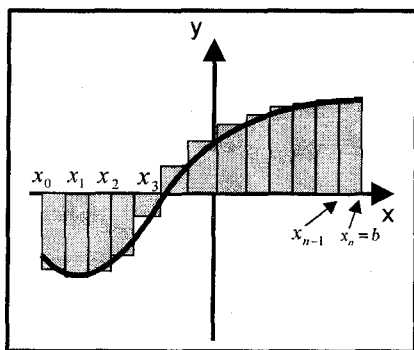


Fig. 2.13

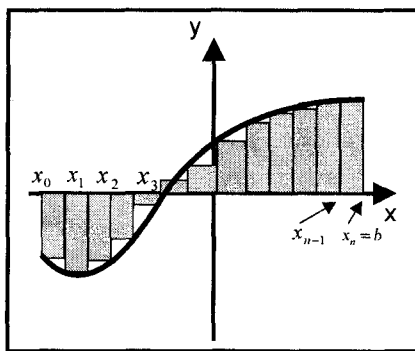


Fig. 2.14

La condición de que f esté acotada en $I = [a; b]$ es esencial para que existan los valores m_j y M_j . Estos números se definieron como los ínfimos y supremos, en vez de mínimos y máximos (como se hizo en la sección 2.2.2), ya que en esta oportunidad no se exigía que f sea continua.

2.3.2 PROPIEDADES DE LAS SUMAS SUPERIORES E INFERIORES

Como f es acotada sobre I , existen m y M tales que

$$m = \inf\{f(x) / x \in I\} \quad y \quad M = \sup\{f(x) / x \in I\}$$

Proposición 1. Sea f una función acotada en $I = [a; b]$ y $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de I . Entonces

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P) \leq M(b-a) \quad (1)$$

Demostración

Se tiene $m \leq m_j \leq M_j \leq M$. Multiplicando todos los términos por $\Delta_j x > 0$ y sumando las relaciones obtenidas para $j = 1, 2, \dots, n$, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n m \Delta_j x &\leq \sum_{j=1}^n m_j \Delta_j x \leq \sum_{j=1}^n M_j \Delta_j x \leq \sum_{j=1}^n M \Delta_j x \quad \text{ó} \\ m \sum_{j=1}^n \Delta_j x &\leq \underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P) \leq M \sum_{j=1}^n \Delta_j x \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^n \Delta_j x = b - a$, entonces $m(b-a) \leq \underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P) \leq M(b-a)$.

Proposición 2. Si f es una función acotada en I , y P_1 y P_2 son dos particiones de I tales que P_2 es un refinamiento de P_1 , ($P_1 \subset P_2$), entonces

$$a) \underline{S}(f, P_1) \leq \underline{S}(f, P_2) \text{ y } \overline{S}(f, P_1) \geq \overline{S}(f, P_2)$$

b) Si $P_2 - P_1$ tienen r puntos, entonces

$$\underline{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, P_1) \leq r(M - m)\|P_1\|$$

$$\overline{S}(f, P_1) - \overline{S}(f, P_2) \leq r(M - m)\|P_1\|$$

Demostración (se deja como ejercicio para el lector).

Proposición 3. Sea f una función acotada en I , y P_1 y P_2 dos particiones arbitrarias de I . Entonces

$$\underline{S}(f, P_1) \leq \overline{S}(f, P_2) \quad (2)$$

Demostración

Sea $P = P_1 \cup P_2$. Como $P_1 \subset P$ y $P_2 \subset P$, por la proposición anterior, se tiene

$$\underline{S}(f, P_1) \leq \underline{S}(f, P) \text{ y } \overline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P_2)$$

Por la proposición 1, se tiene $\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P)$. Luego,

$$\underline{S}(f, P_1) \leq \overline{S}(f, P_2)$$

2.4 INTEGRALES INFERIORES Y SUPERIORES

Denotemos con \mathbf{D} al conjunto de todas las particiones posibles de I . Si f es acotada en I , la desigualdad (1) es verdadera para todo $P \in \mathbf{D}$ y asegura que el conjunto $\{\underline{S}(f, P) / P \in \mathbf{D}\}$ es acotado superiormente y el conjunto $\{\overline{S}(f, P) / P \in \mathbf{D}\}$ es acotado inferiormente.

Definición 4. Si f es una función acotada en I , el número $\sup\{\underline{S}(f, P) / P \in \mathbf{D}\}$ se denomina integral inferior de f en I y se indica como

$$\underline{J} = \int_a^b f(x) dx = \sup\{\underline{S}(f, P) / P \in \mathbf{D}\}$$

El número $\inf\{\overline{S}(f, P) / P \in \mathbf{D}\}$ se denomina integral superior de f en I y se indica como

$$\overline{J} = \int_a^b f(x) dx = \inf\{\overline{S}(f, P) / P \in \mathbf{D}\}$$

2.4.1 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES SUPERIORES E INFERIORES

1. Si f es función acotada en I , entonces

$$\underline{J} \leq \bar{J} \quad \text{ó} \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx \quad (3)$$

2. Si f es función acotada en I , entonces

$$m(b-a) \leq \underline{J} \leq \bar{J} \leq M(b-a) \quad (4)$$

donde $m = \inf \{f(x) / x \in I\}$ y $M = \sup \{f(x) / x \in I\}$.

3. Si f es acotada en I , existen c_1 y $c_2 \in I$ tales que

$$\underline{J} = f(c_1)(b-a) \quad \text{y} \quad \bar{J} = f(c_2)(b-a) \quad (5)$$

de modo que $m \leq f(c_1) \leq f(c_2) \leq M$.

4. Si f es acotada en I y $c \in (a; b)$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^{\bar{b}} f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^{\bar{b}} f(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

2.5 INTEGRAL DE RIEMANN

Definición 5. Se dice que una función acotada $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es **integrable Riemann en I** si

$$J = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx$$

Por simplicidad, se llama **integral de f sobre I** o **integral definida de f sobre I** o **integral de f de a hasta b** .

En $\int_a^b f(x) dx$, el símbolo \int es llamado símbolo de integración.

Este símbolo, que es una S alargada, fue introducido por Leibniz para representar la suma, que proviene de la palabra latina "summa". Además, $f(x)$ es el integrando, $f(x)dx$ es el elemento de integración, el número a es el límite inferior y b es el límite superior. La variable x no tiene significado especial, ya que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(u) du, \text{ etc.}$$

Ejemplo 20. Sea $f(x) = k$ la función constante. Por el ejemplo 16, para $I = [a; b]$ se tiene $\underline{S}(f, P) = \bar{S}(f, P) = k(b - a)$.

Entonces $\underline{J} = \bar{J} = k(b - a)$. Por lo tanto, f es integrable en $[a; b]$ y se tiene

$$\int_a^b k \, dx = k(b - a)$$

Ejemplo 21 (función no integrable). Consideremos la función de Dirichlet $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

Para cualquier partición P de $I = [0; 1]$ (ejemplo 19), se tiene:

$$\underline{S}(f; P) = 0 \quad \text{y} \quad \bar{S}(f; P) = 1$$

Entonces $\underline{J} = 0$ y $\bar{J} = 1$ y, por tanto, f no es integrable en I .

Observación 3. Interpretación geométrica de la integral definida de una función continua f en $[a; b]$.

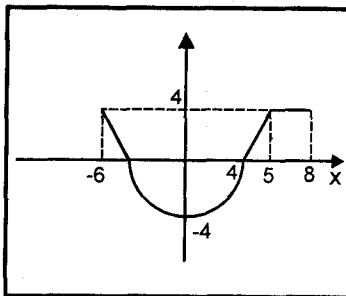
De la interpretación geométrica de las sumas superiores e inferiores (secc. 2.3.1), deducimos que si R es la región plana limitada por las gráficas de f , las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x , y $A(R)$ representa numéricamente al área de la región R ; entonces

a) Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$, $A(R) = \int_a^b f(x) \, dx$

b) Si $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$, $-A(R) = \int_a^b f(x) \, dx$

c) Si al número $\int_a^b f(x) \, dx$ lo llamamos *área algebraica*, para una función arbitraria f continua en $[a; b]$, esta integral definida de f en $[a; b]$ representa la suma de las áreas algebraicas de las regiones determinadas por la gráfica de f y el eje x , desde $x = a$ hasta $x = b$.

Ejemplo 22. La gráfica de f consta de segmentos de recta y una semicircunferencia, como se indica en la figura adjunta. Halle:



- a) $\int_0^4 f(x) dx$ b) $\int_{-6}^4 f(x) dx$
 c) $\int_{-6}^8 f(x) dx$ d) $\int_{-6}^8 |f(x)| dx$
 e) El área de la región limitada por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = -6$ y $x = 8$.

Solución

- a) Como el área del círculo de radio $r = 4$ es $A_1 = \pi r^2 = 16\pi \text{ u}^2$, entonces

$$\int_0^4 f(x) dx = -\frac{A_1}{4} = -4\pi$$

- b) Dado que el área de un triángulo de base $b = 2$ y altura $h = 4$ es $A_2 = 4 \text{ u}^2$ y el área del semicírculo es $A = \frac{A_1}{2} = 8\pi \text{ u}^2$, entonces

$$\int_{-6}^4 f(x) dx = \int_{-6}^{-4} f(x) dx + \int_{-4}^4 f(x) dx = A_2 - A = 4 - 8\pi.$$

- c) Puesto que la integral definida desde -6 hasta 8 está formada por la suma de áreas algebraicas de un triángulo ($A_2 = 4$), de un semicírculo ($-\frac{A_1}{2} = -8\pi$), de un triángulo ($A_3 = 2$) y de un rectángulo ($A_4 = 12$), entonces

$$\begin{aligned} \int_{-6}^8 f(x) dx &= \int_{-6}^{-4} f(x) dx + \int_{-4}^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx \\ &= 4 + (-8\pi) + 2 + 12 = 18 - 8\pi \end{aligned}$$

- d) Como $|f(x)| = -f(x)$, $\forall x \in [-4; 4]$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-6}^8 |f(x)| dx &= \int_{-6}^{-4} |f(x)| dx - \int_{-4}^4 |f(x)| dx + \int_4^5 |f(x)| dx + \int_5^8 |f(x)| dx \\ &= 4 - (-8\pi) + 2 + 12 = 18 + 8\pi \end{aligned}$$

- e) El área de la región pedida es

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{-6}^8 |f(x)| dx = \int_{-6}^{-4} |f(x)| dx + \int_{-4}^4 (-f(x)) dx + \int_4^5 |f(x)| dx + \int_5^8 |f(x)| dx \\ &= 4 - (-8\pi) + 2 + 12 = 18 + 8\pi \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Teorema 1 (Criterio de integrabilidad de Riemann). Si f es una función acotada en I , una condición necesaria y suficiente para que f sea integrable en I es que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, exista una partición P de I tal que

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon \quad (6)$$

Demostración

a) (\Rightarrow) Por hipótesis, f es integrable en I . Si $\underline{J} = \sup\{\underline{S}(f, P) / P \in \mathcal{D}\}$, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P_1 de I tal que

$$\underline{J} - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, P_1) \quad \text{ó} \quad \underline{J} - \underline{S}(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (7)$$

Por otro lado, siendo $\bar{J} = \inf\{\bar{S}(f, P) / P \in \mathcal{D}\}$ y tomando el mismo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_2 tal que

$$\bar{S}(f, P_2) < \bar{J} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ó} \quad \bar{S}(f, P_2) - \bar{J} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (8)$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades (7) y (8) y considerando que $\underline{J} = \bar{J}$, obtenemos

$$\bar{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, P_1) < \varepsilon$$

Considerando $P_1 \cup P_2 = P$ (es un refinamiento de P_1 y P_2), tenemos

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P_2) - \underline{S}(f, P_1) < \varepsilon$$

b) (\Leftarrow) Supongamos que dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P de I tal que (7) es verdadero. Como

$$\underline{J} \geq \underline{S}(f, P) \quad \text{y} \quad \bar{J} \leq \bar{S}(f, P)$$

se obtiene $0 \leq \bar{J} - \underline{J} \leq \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$. Como ε es arbitrario, se obtiene

$$\bar{J} - \underline{J} = 0 \quad \text{o} \quad \bar{J} = \underline{J}$$

Por tanto, f es integrable en I .

Hasta ahora, $\int_a^b f(x)dx$ se ha definido solo si $a < b$. Por conveniencia, se dan las siguientes definiciones:

Definición 6. Si $a < b$, se define

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx, \text{ siempre que } \int_a^b f(x)dx \text{ exista.}$$

Definición 7. Si f es una función definida en a , se define

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Proposición 4. Si f es una función continua en $I = [a; b]$, entonces f es integrable en I .

La demostración se deja como ejercicio al lector.

2.5.1 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. Si f es una función integrable en I , entonces es integrable en cualquier subintervalo $[c; d] \subset I$.
2. Si f es una función integrable en I , entonces para toda constante real k , kf es integrable en I y se tiene:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (9)$$

3. Si f y g son funciones integrables en I , entonces $f \pm g$ es integrable en I y se tiene:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (10)$$

4. Si f es integrable en los intervalos $[a; c]$ y $[c; b]$, entonces f es integrable en $I = [a; b]$ y se tiene:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (11)$$

(Propiedad aditiva respecto al intervalo de integración).

Esta propiedad es válida para tres números arbitrarios a, b, c siempre que las tres integrales existan.

5. Si f es integrable en $I = [a; b]$ y $f(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (12)$$

6. Si f y g son funciones integrables en I y $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (13)$$

7. Si f es integrable en $I = [a; b]$ y $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in I$, entonces

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \quad (14)$$

8. Si f es integrable en I , entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (15)$$

2.5.2 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA INTEGRALES

Teorema 2. Si f es una función continua en $I = [a; b]$, entonces existe un número $c \in I$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Demostración

El Teorema del Valor Intermedio de una función continua indica: "Si f es continua en $[a; b]$ y se cumple que $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier ω entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un número c entre a y b tal que $f(c) = \omega$ ".

Por hipótesis, f es integrable en I , pues f es continua en I (Prop. 4). Luego, por (14), se tiene:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

donde m y M son el mínimo y el máximo absolutos de f en I , respectivamente (estos valores existen porque f es continua).

Luego, $m = f(x_m)$ y $M = f(x_M)$, con x_m y $x_M \in I$, y

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq f(x_M)$$

Por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe c entre x_m y x_M ($c \in I$) tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}, \text{ es decir, } \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \text{ con } c \in I$$

2.6 TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO INTEGRAL

Teorema 3 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral o Teorema de Barrow)

Si f es una función continua en $I = [a; b]$ y F es la función definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in I, \text{ entonces se tiene}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x), \quad \forall x \in I$$

Demostración

Por definición, para $x \in [a; b]$ (x fijo), se tiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \end{aligned}$$

Por el teorema del valor intermedio para integrales, para el par de números x y $x + h \in [a; b]$ existe c entre x y $x + h$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)(x + h - x) = hf(c)$$

Luego,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(c)}{h}, \quad c \text{ entre } x \text{ y } x + h$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c), \quad c \text{ entre } x \text{ y } x + h$$

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I, \text{ es decir, } F \text{ es una antiderivada de } f \text{ en } I.$$

Observación 4. Este teorema establece un enlace entre los conceptos de integral definida e indefinida. Se prueba que una función f continua en I admite una antiderivada dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, pues $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Este es un teorema de existencia, pues si f es una función continua en I , existe $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ tal que $F'(x) = f(x), \forall x \in I$. Como $F(a) = 0$, F es la antiderivada de f en I cuya gráfica pasa por el punto $(a; 0)$.

Teorema 4 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral)

Si f es una función continua en $I = [a; b]$ y F es una antiderivada de f en I ($F'(x) = f(x), \forall x \in I$), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \quad (16)$$

Demostración

Como F es una antiderivada de f en I y, por el primer teorema fundamental, F definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es también una antiderivada de f en I , entonces existe una constante c tal que $F(x) = F(x) + c, \forall x \in I$.

Así, tenemos

$$F(b) = F(b) + c = \int_a^b f(t)dt + c \quad \text{y} \quad F(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t)dt + c$$

Como $\int_a^a f(t)dt = 0$, entonces

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Como la variable t no tiene significado especial, se concluye

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Observación 5

- a) $[F(x)]_a^b$ es una notación para $F(b) - F(a)$.
- b) La fórmula dada en (16) es llamada "**Fórmula de Newton-Leibniz**" debido a que estos dos matemáticos establecieron, independientemente uno del otro, la relación íntima entre los conceptos de la derivada y de la integral. El nombre que se le da a esta fórmula es convencional, ya que ni Newton (1642-1727) ni Leibniz (1646-1716) dieron exactamente con esta fórmula.
- c) Obsérvese que la diferencia $F(b) - F(a)$ no depende de la elección de la antiderivada F , puesto que todas las antiderivadas se diferencian en una constante, la que desaparece al efectuar la diferencia. Por eso, al calcular una integral definida no es necesario considerar la constante en la antiderivada.

Ejemplo 23. Sea la función $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$. Calcule

- a) $F'(x)$ b) $F''(x)$ c) $F'(1)$

Solución

- a) Siendo $f(t) = 1/(1+t^2)$ una función continua, por el primer teorema fundamental, se tiene $F'(x) = 1/(1+x^2)$, $\forall x \geq 0$ (es necesario notar que $F'(x) = 1/(1+x^2)$ es válido para todo $x \in \mathbb{R}$). Como $F'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces F es una función estrictamente creciente en \mathbb{R} .
- b) $F''(x) = -2x/(1+x^2)^2$ (F presenta punto de inflexión en $x = 0$).
- c) $F'(1) = 1/2$.

Finalmente, dado que $F'(x) = 1/(1+x^2)$, entonces $F(x) = \arctan x + C$ para alguna constante C . Como $F(0) = 0$, entonces

$$0 = \arctan(0) + C \Rightarrow C = 0, \text{ es decir, } F(x) = \arctan x$$

Ejemplo 24. Calcule el valor de cada una de las integrales

- a) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ c) $\int_0^1 e^x \, dx$ d) $\int_0^1 \sinh x \, dx$

Solución

- a) Una antiderivada de $f(x) = 1/(1+x^2)$ en $I = [-1; 1]$ es $F(x) = \arctan x$ (en esta antiderivada, por la obs. 5-c, no se considera la constante). Luego,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- b) $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -[\cos x]_0^{\pi/2} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1$

$$c) \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$d) \int_0^1 \sinh x dx = [\cosh x]_0^1 = \cosh(1) - 1$$

Compare las respuestas obtenidas en (b), (c) y (d) con las obtenidas en los ejemplos (13), (14) y (15) de este capítulo.

Ejemplo 25

- i) Sea $G(x) = \int_a^u f(t)dt$, donde $f: I = [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $u = u(x)$ es una función derivable ($u: I_1 \rightarrow I$). Pruebe que

$$G'(x) = f(u) \cdot u', \text{ donde } u' = \frac{d}{dx}(u(x))$$

- ii) Sea $H(x) = \int_u^a f(t)dt$, donde f y $u = u(x)$ tienen las condiciones dadas en (i). Demuestre que

$$H'(x) = -f(u) \cdot u', \text{ donde } u' = \frac{d}{dx}(u(x))$$

Solución

- i) Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y $u = u(x)$, entonces

$(F \circ u)(x) = F(u(x)) = \int_a^u f(t)dt = G(x)$. Por la regla de la cadena, se tiene

$$G'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) = F'(u) \cdot u' = f(u) \cdot u', \text{ pues } F'(x) = f(x).$$

En resumen, $G'(x) = f(u) \cdot u'$.

- ii) $H(x) = \int_u^a f(t)dt = -\int_a^u f(t)dt$

Por (i), $H'(x) = -(f(u) \cdot u') = -f(u) \cdot u'$.

Ejemplo 26. Sea $G(x) = \int_{-3}^{x^4} \frac{1}{1+9\sin^2 t} dt$ y $H(x) = \int_{x^3}^2 \frac{1}{t^2 + 9\sin t + 15} dt$.

Halle: a) $G'(x)$ b) $H'(x)$

Solución

- a) Usando el ejemplo 23-i), para $f(t) = 1/(1+9\sin^2 t)$ y $u = x^4$, se tiene

$$G'(x) = \frac{1}{1+9\sin^2(x^4)} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{1+9\sin^2(x^4)}$$

- b) Usando el resultado del ejemplo 23-ii), obtenemos

$$H'(x) = -\frac{1}{x^6 + 9\sin(x^3) + 15} \cdot 3x^2 = -\frac{3x^2}{x^6 + 9\sin(x^3) + 15}$$

Ejemplo 27. Si $G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt[3]{1+y^3} dy$, halle $G'(x)$.

Solución

Como $f(y) = \sqrt[3]{1+y^3}$ es continua en \mathbb{R} , entonces

$$G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt[3]{1+y^3} dy = \int_{x^2}^0 \sqrt[3]{1+y^3} dy + \int_0^{x^3} \sqrt[3]{1+y^3} dy$$

Luego,

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\sqrt[3]{1+x^6} \cdot 2x + \sqrt[3]{1+x^9} \cdot 3x^2 \\ &= x \left[3x \sqrt[3]{1+x^9} - 2\sqrt[3]{1+x^6} \right] \end{aligned}$$

Ejemplo 28. Calcule el valor de $\int_{-1}^1 \frac{|x|dx}{1+x^2}$.

Solución

$$\text{Si } f(x) = \frac{|x|}{1+x^2}, \text{ entonces } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2}, & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x}{1+x^2}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para calcular esta integral, se aplicará la propiedad aditiva respecto al intervalo de integración. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = -\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= -\left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}(-\ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 2) = \ln 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 29. Calcule $J = \int_{-4}^4 |x^2 + x - 6| dx$.

Solución

La variación de signos de $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ es

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ & -3 & 2 \end{array}$$

$$\text{Luego, } |x^2 + x - 6| = \begin{cases} x^2 + x - 6, & \text{si } x \in \langle -\infty; -3 \rangle \cup [2; +\infty) \\ -(x^2 + x - 6), & \text{si } x \in \langle -3; 2 \rangle \end{cases}$$

Aplicando la propiedad aditiva de la integral respecto al intervalo de integración, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-4}^4 |x^2 + x - 6| dx &= \int_{-4}^{-3} (x^2 + x - 6) dx - \int_{-3}^2 (x^2 + x - 6) dx + \int_2^4 (x^2 + x - 6) dx \\&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \right]_{-4}^{-3} - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \right]_{-3}^2 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \right]_2^4 \\&= \frac{17}{6} - \left(-\frac{125}{6} \right) + \frac{38}{3} = \frac{109}{3}\end{aligned}$$

Ejemplo 30. Sabiendo que $x \geq 9$, resuelva la ecuación:

$$\int_9^x \frac{16 dt}{\sqrt{2}(16-t^2)} = \frac{2\pi}{3} + \ln\left(\frac{2+\sqrt{x}}{5\sqrt{x}-10}\right) - 2 \arctan \frac{3}{2} - \ln 5 \quad \dots (\alpha)$$

Solución

En primer lugar, calculamos la integral $\int \frac{16 dt}{\sqrt{t}(16-t^2)}$ usando la sustitución $t = u^2$ y $dt = 2u du$. De esta manera,

$$\begin{aligned}\int \frac{16 dt}{\sqrt{t}(16-t^2)} &= \int \frac{32 u du}{u(16-u^4)} = \int \frac{32}{16-u^4} du = \int \frac{4}{4-u^2} du + \int \frac{4}{4+u^2} du \\&= \ln \left| \frac{u+2}{u-2} \right| + 2 \arctan \left(\frac{u}{2} \right) + C = \ln \left| \frac{\sqrt{t}+2}{\sqrt{t}-2} \right| + 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{t}}{2} \right) + C\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_9^x \frac{16 dt}{\sqrt{t}(16-t^2)} &= \left[\ln \left| \frac{\sqrt{t}+2}{\sqrt{t}-2} \right| + 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{t}}{2} \right) \right]_9^x \\&= \ln \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \right) + 2 \arctan \frac{\sqrt{x}}{2} - 2 \arctan \frac{3}{2} - \ln 5 \\&= \ln \left(\frac{\sqrt{x}+2}{5\sqrt{x}-10} \right) + 2 \arctan \frac{\sqrt{x}}{2} - 2 \arctan \frac{3}{2} \quad \dots (\beta)\end{aligned}$$

Reemplazando (β) en (α) , se tiene

$$\begin{aligned}\ln \left(\frac{\sqrt{x}+2}{5\sqrt{x}-10} \right) + 2 \arctan \frac{\sqrt{x}}{2} - 2 \arctan \frac{3}{2} &= \frac{2\pi}{3} + \ln \left(\frac{2+\sqrt{x}}{5\sqrt{x}-10} \right) - 2 \arctan \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \arctan \frac{\sqrt{x}}{2} &= \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \arctan \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Finalmente, $x = 12$.

EJERCICIOS

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, calcule la derivada de las siguientes funciones.

$$a) F(x) = \int_1^{2x} \cosh(2t^2 + 1) dt$$

$$R. F'(x) = 2 \cosh(8x^2 + 1)$$

$$b) F(x) = \int_a^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\operatorname{arcsen} t} dt$$

$$c) F(x) = \int_2^x \left(\int_8^y \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt \right) dy$$

$$R. F'(x) = \int_8^x \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$$

$$d) F(x) = \int_a^{\int_0^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t} dt} \cos^2(y^2 + 4) dy$$

$$e) F(x) = \operatorname{sen} \left[\int_0^x \operatorname{sen} \left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt \right) dy \right]$$

$$2. \text{ Sean } F(x) = \int_{\sqrt{3}}^{\operatorname{arcsen}(\cos x)} f(\operatorname{sen} t) dt = \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}} \quad y$$

$$G(x) = \int_{\sqrt{2}}^{\operatorname{sen} x} \sqrt{g(t)} dt = \sqrt{1-\cos x}$$

$$\text{Halle } H'(x) \text{ si } H(x) = \int_{g(x)(1-\sqrt{1-x^2})}^{f(1)} \frac{dt}{t^2}.$$

$$R. -\frac{8}{x^3}$$

$$3. \text{ Si } \int_0^{\frac{1}{3x+1}} f(t) dt = \frac{2}{ax} + ax, \text{ calcule los valores de } a \text{ de modo que } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{3}.$$

$$R. a = -2 \text{ ó } 1$$

$$4. \text{ Si } F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^5}{1+t^4} dt, \text{ halle } F'(x).$$

$$5. \text{ Si } G(x) = \int_{x^2+1}^{x+x^2} 2^{-t^2} dt, \text{ calcule } G'(x) \text{ y } G'(1).$$

$$6. \text{ Si } F(x) = \int_{x^2}^{e^x} x(t^2 + 1) dt, \text{ calcule } F'(x).$$

$$7. \text{ Sea } G(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt, \text{ donde } f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ es una función continua y las funciones } \varphi_1, \varphi_2: J \rightarrow I, \text{ que son funciones derivables. Demuestre que}$$

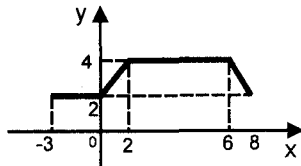
$$G'(x) = f(\varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'(x) - f(\varphi_1(x)) \cdot \varphi_1'(x)$$

8. Sea $f: [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si F es una antiderivada de f en $[-1; 2]$, con $F(-1) = 3$ y $F(2) = 7$, calcule $\int_{-1}^2 f(x)dx$. R. 4

9. En la figura adjunta se muestra la gráfica de una función g . Si f es la función definida por $f(x) = \int_{-3}^x g(t)dt$, $x \in [-3; 8]$. Calcule gráficamente:

a) $f(-3)$ b) $f(0)$ c) $f(8)$

R. a) 0 b) 6 c) 34



10. Sea $f: [-6; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $g: [-6; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ una función impar continua, tal que $\int_{-6}^0 f(x)dx = 10$ y $\int_{-6}^6 g(x)dx = -2$. Halle:

a) $\int_{-6}^0 [f(x) + g(x)] dx$ R. 12 b) $\int_{-6}^0 [f(x) + s g(x)] dx$ R. 20

11. En los siguientes ejercicios, calcule $f(2)$ sabiendo que f es continua y verifica la ecuación dada para todo $x \geq 0$.

a) $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$ R. 16

b) $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2(1+x)$ R. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$

c) $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x^2(1+x)$ R. $\sqrt[3]{36}$

d) $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$ R. $\frac{1}{5}$

12. Demuestre que si f es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$$

Sug: considere $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du$, entonces $F'(x) = \int_0^x f(u)du$.

Luego, halle su antiderivada y calcule $F(0)$ para su constante.

13. A partir del ejercicio anterior, demuestre que

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2 du = 2 \int_0^x \left[\int_0^u \left(\int_0^z f(t)dt \right) dz \right] du$$

14. Halle $f(x)$ si $f'''(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$, $\forall x \geq 0$.

15. Calcule el valor de las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^2 x^3 dx$

b) $\int_{-1}^2 (x+1)^3 dx$

c) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

d) $\int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx$

e) $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+|x|} dx$

f) $\int_3^5 \left| \frac{5x-20}{(2-x)(x^2+1)} \right| dx$ R. 1,336685 ...

g) $\int_0^\pi |\cos x| dx$

h) $\int_0^{\pi/6} \sin^2(3x) dx$

i) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1} dx$

j) $\int_1^e \ln x dx$

16. Sea $f: [-6; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si f es impar y $\int_{-6}^{-2} f(x) dx = 3$,
halle $\int_2^6 (f(x) - 2x) dx$. R. -35

17. Para cierta población, suponga que N es una función continua tal que $N(x)$ es el número de personas que alcanzan la edad de x en cualquier año. Esta función se llama *función de la tabla de vida*. Bajo condiciones apropiadas, la integral $\int_x^{x+n} N(t) dt$ da el número esperado de gente en la población que tiene exactamente entre x y $x+n$ años, inclusive. Si $N(x) = 300\sqrt{100-x}$, determine el número de personas que tienen entre 36 y 64 años.

R. 59200 personas

18. Sea L_1 una recta tangente a la curva $C: y = g(x)$ en el punto $P(2; 3)$. Además, la recta L_1 pasa por el punto $Q(10; 7)$ que no está en la curva C .

Si $f(x) = \int_1^{g(x)} \sqrt{t^2 + 7} dt$, halle $f'(2)$.

R. 2

2.7 CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema 5. Si f es una función continua en $I = [a; b]$ y si se reemplaza la variable x de la integral por $g(t)$ (es decir, $x = g(t)$), donde $g: [\alpha; \beta] \rightarrow I$ tiene derivada continua en $[\alpha; \beta]$, con $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$; entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t)dt \quad (17)$$

Demostración

Sea $F(y) = \int_a^y f(x)dx$, $y \in I$. Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene $F'(y) = f(y)$, $\forall y \in I$.

Por la regla de la cadena ó derivada de una función compuesta, tenemos

$$[F(g(t))]' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Por tanto, $F(g(t))$ es una antiderivada de $f(g(t)) \cdot g'(t)$. Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t)dt &= [F(g(t))]_{\alpha}^{\beta} = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Observación 5. Si la función $g: [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ es tal que $g(\beta) = a$ y $g(\alpha) = b$, por la fórmula (17), se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Ejemplo 31. Calcule $I = \int_2^3 \frac{x^2}{(1+x^3)^3} dx$.

Solución

Haciendo $t = 1 + x^3$, se tiene que $x = g(t) = \sqrt[3]{t-1}$, $g'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}$, $g(9) = 2$ y $g(28) = 3$. Dado que g y g' son continuas en $[9; 28]$, entonces

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{x^2}{(1+x^3)^3} dt = \int_9^{28} \frac{\sqrt[3]{(t-1)^2}}{t^3} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(t-1)^2}} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_9^{28} t^{-3} dt = -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{t^2} \right]_9^{28} = \frac{703}{381024} \end{aligned}$$

En la práctica, no es necesario dar la función $g(t)$ explícitamente. Considerando que el lector está habituado a cambiar la variable en una integral indefinida, sólo nos queda decir que para cambiar los límites de integración basta reemplazar la variable original x por los límites de integración en la correspondiente sustitución y así obtener los nuevos límites de integración (que son los valores de la nueva variable). En el ejemplo anterior, procederíamos así:

Como la sustitución es $t = 1 + x^3$, entonces $dt = 3x^2 dx$.

Para $x = 2 \Rightarrow t = 9 = \alpha$; para $x = 3 \Rightarrow t = 28 = \beta$.

Por tanto,

$$I = \int_2^3 \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^3} = \frac{1}{3} \int_9^{28} \frac{3x^2 dx}{(1+x^3)^3} = \frac{1}{3} \int_9^{28} \frac{dt}{t^3} = \frac{703}{381024}$$

Ejemplo 32. Calcule el valor de $I = \int_{1/2}^1 \frac{(x^2 - 1)dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}$.

Solución

Antes de efectuar el cambio de variable, dividimos numerador y denominador por x^2 ($x^2 > 0$, pues $x \in [1/2; 1]$) y luego reemplazamos $t = x + 1/x$. Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^1 \frac{(x^2 - 1)dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}} = \int_{1/2}^1 \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \int_{5/2}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{arcsec} \left(\frac{|t|}{\sqrt{2}} \right) \right]_{5/2}^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arcsec}(\sqrt{2}) - \operatorname{arcsec} \frac{5}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsec} \frac{5}{2} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 33. Demuestre que

a) Si f es continua en $[0; a]$, entonces $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$.

b) Si f es función par y continua en $[-a; a]$, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

c) Si f es función impar y continua en $[-a; a]$, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

- d) Si f es función par y continua, entonces $\int_0^{\pi} x f(\cos x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.
- e) Si f es continua, entonces $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$.

Solución

- a) En la integral $\int_0^a f(a-x) dx$ reemplazamos $a-x = z$ y $dz = -dx$.
Entonces para $x = 0 \Rightarrow z = a$, y para $x = a \Rightarrow z = 0$. Por tanto,

$$\int_0^a f(a-x) dx = - \int_a^0 f(z) dz = \int_0^a f(z) dz = \int_0^a f(x) dx$$

(La última igualdad es válida porque la variable z no tiene significado especial)

b) $\int_{-a}^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x) dx}_J + \int_0^a f(x) dx \quad \dots (\alpha)$

En la integral J reemplazamos $x = -y$. Enseguida, utilizamos el hecho de que por ser f par se verifica $f(-y) = f(y)$.

$$J = \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-y) dy = \int_0^a f(y) dy = \int_0^a f(x) dx \quad \dots (\beta)$$

Reemplazando (β) en (α) , se obtiene

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- c) Siguiendo el mismo procedimiento empleado en la parte (b) y utilizando el hecho de que $f(-y) = -f(y)$ (por ser f impar), se prueba que

$$J = \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$$

Reemplazando este resultado en (α) , se sigue que $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

- d) y e) Ejercicio. En ambos casos reemplazar $x = \pi - y$.

Ejemplo 34. Calcule $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

Solución

Si utilizamos la sustitución $x = \tan \theta$, tenemos

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan \theta)}{\sec^2 \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan \theta) d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln \left[1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \right] d\theta \quad (\text{aplicando el ejemplo 32 - a})$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln \left(1 + \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right) d\theta = \int_0^{\pi/4} \ln \left(\frac{2}{1 + \tan \theta} \right) d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln 2 d\theta - \underbrace{\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan \theta) d\theta}_I$$

Por tanto, $2I = \int_0^{\pi/4} \ln 2 d\theta = \frac{\pi}{4} \ln 2$, de donde se concluye que $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

Ejemplo 35. Calcule $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$.

Solución

Teniendo en cuenta que $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, se tiene

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} x \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx$$

Puesto que el integrando es de la forma $x f(\sin x)$, donde $f(\sin x) = \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}$, usando el ejemplo 32-e, obtenemos

$$I = \int_0^{\pi} x \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} [\arctan(\cos x)]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2} [\arctan(-1) - \arctan(1)] = -\frac{\pi}{2} \left[-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi^2}{4}$$

Ejemplo 36. Calcule $J = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^9 \cos x + \sqrt[3]{\tan x} + \sin x e^{\cos^2 x} + \cos^2 x) dx$.

Solución

$$J = \underbrace{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^9 \cos x + \sqrt[3]{\tan x} + \sin x e^{\cos^2 x}) dx}_{J_1} + \underbrace{\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 x dx}_{J_2}$$

$$J_2 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 x dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{\pi + 2}{4}$$

El integrando de J_1 es $f(x) = x^9 \cos x + \sqrt[7]{\tan x} + \sin x e^{\cos^2 x}$ y es una función impar, pues

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^9 \cos(-x) + \sqrt[7]{\tan(-x)} + \sin(-x) e^{\cos^2(-x)} \\ &= -x^9 \cos x - \sqrt[7]{\tan x} - \sin x e^{\cos^2 x} = -f(x) \end{aligned}$$

Luego, por el ejemplo 31 - a, se sigue que $J_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx = 0$

Por tanto, $J = 0 + \frac{\pi + 2}{4} = \frac{\pi + 2}{4}$.

2.8 INTEGRACIÓN POR PARTES EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema 6. Si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones con derivadas continuas en $I = [a; b]$, entonces

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du \quad (18)$$

Demostración

De la diferencial de un producto se deduce que $u dv = d(uv) - v du$.

$$\begin{aligned} \text{Luego, } \int_a^b u dv &= \int_a^b [d(uv) - v du] \Leftrightarrow \int_a^b u dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du \\ &\Rightarrow \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du \end{aligned}$$

(Todas estas integrales existen, pues u , v , u' , v' son continuas)

Ejemplo 37. Calcule $J = \int_1^3 x^2 \ln x dx$.

Solución

Haciendo $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$, obtenemos

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^3 - \frac{1}{3} \int_1^3 x^2 dx = \left(9 \ln 3 - \frac{1}{3} \ln 1 \right) - \left[\frac{1}{9} x^3 \right]_1^3 \\ &= 9 \ln 3 - \frac{1}{9} (27 - 1) = 9 \ln 3 - \frac{26}{9} \end{aligned}$$

Ejemplo 38. Calcule el valor de $J = \int_1^{16} \arctan \sqrt{x-1} \, dx$.

Solución

Si $z = \arctan \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sec^2 z \Rightarrow x = \sec^4 z$ y $dx = 4 \sec^4 z \tan z \, dz$.

Para $x = 1 \Rightarrow z = 0$ y para $x = 16 \Rightarrow z = \pi/3$. Entonces

$$J = \int_0^{\pi/3} z \cdot \sec^4 z \tan z \, dz$$

Para integrar por partes a esta última integral, consideramos

$$\begin{cases} u = z \Rightarrow du = dz \\ dv = 4 \sec^3 z \cdot \sec z \tan z \, dz \Rightarrow v = \sec^4 z \end{cases}$$

Entonces

$$J = [z \sec^4 z]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \sec^4 z \, dz \quad (*)$$

$$= \left(\frac{\pi}{3}\right)(16) - \int_0^{\pi/3} (1 + \tan^2 z) \sec^2 z \, dz$$

$$= \frac{16\pi}{3} - \left[\tan z + \frac{\tan^3 z}{3} \right]_0^{\pi/3} = \frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

(*) Para integrar $\sec^4 z$ es suficiente considerar que $\sec^2 z = 1 + \tan^2 z$.

2.9 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DISCONTINUAS

Definición 6. Sea $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $I = [a; b]$. Sean c_1, c_2, \dots, c_n elementos de I , de tal manera que $c_j \in I_j = [x_{j-1}; x_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$.

La suma

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^n f(c_j) \Delta_j x$$

se denomina **Suma de Riemann** de f con respecto a la partición P .

Sean $m_j = \inf\{f(x) / x \in I_j\}$ y $M_j = \sup\{f(x) / x \in I_j\}$. Entonces

$$m_j \leq f(c_j) \leq M_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{y más aún}$$

$$\underline{S}(f, P) \leq S(f, P) \leq \bar{S}(f, P)$$

La suma de Riemann es un tipo de suma que no necesariamente es una suma inferior o una suma superior, sino más bien está comprendida entre ellas.

Definición 7. Se dice que $S(f, P)$ tiene límite $J \in \mathbb{R}$ cuando $\|P\| \rightarrow 0$ y se escribe $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P) = J$ si dado $\varepsilon > 0$ (arbitrario), existe $\delta > 0$ tal que para toda partición P , con $0 \leq \|P\| < \delta$, y para cualquier c_j se tiene

$$\|S(f, P) - J\| < \varepsilon$$

Teorema 7 (de Darboux). Si f es una función acotada en I , una condición necesaria y suficiente para que f sea integrable en I es que exista $J \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P) = J; \quad \left(J = \int_a^b f(x) dx \right)$$

Demostración (Ejercicio).

Teorema 8. Sean $f, g : I = [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$, excepto para un número finito de puntos. Si g es integrable en I , entonces f es integrable en I y se tiene

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx \quad (19)$$

Demostración

Si g es integrable en I y $\int_a^b g(x) dx = J$, por el teorema de Darboux, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo P , con $0 < \|P\| < \delta_1$, y $\forall c_j \in I_j$ se tiene

$$|S(g, P) - J| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por otro lado, si $A = \{x \in I / f(x) \neq g(x)\}$ posee r puntos (r finito) y sea $L = \sup\{|f(x) - g(x)| / x \in I\}$, para toda partición P , con $\|P\| < \frac{\varepsilon}{2rL}$, se tiene

$$|S(f, P) - S(g, P)| = \left| \sum_{c_j \in A} [f(c_j) - g(c_j)] \Delta_j x \right| \leq r L \|P\| < \frac{r L \varepsilon}{2rL} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego, si $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2rL}\right\}$, se tiene

$$|S(f, P) - J| \leq |S(f, P) - S(g, P)| + |S(g, P) - J| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En resumen, para toda partición P , con $\|P\| < \delta$, y $\forall c_j \in I$ se verifica

$$|S(f, P) - J| < \varepsilon$$

Por tanto, por el teorema de Darboux, f es integrable en I y

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

Teorema 9. Si f es continua en $I = [a; b]$ excepto en los puntos a ó b , en los cuales existen $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b^-)$ (finitos), entonces f es integrable en I y existe una función F , con $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \langle a; b \rangle$, tal que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Demostración. Ejercicio para el lector.

Definición 8 (Función seccionalmente continua en $I = [a; b]$). Se dice que la función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es seccionalmente continua en I cuando f es continua para todo $x \in I$ excepto para un número finito de puntos c_j , $j = 1, 2, \dots, m$, para los cuales existe

$$f(c_j^-) = \lim_{x \rightarrow c_j^-} f(x) \quad \text{y} \quad f(c_j^+) = \lim_{x \rightarrow c_j^+} f(x)$$

Si $c_j = a$ o $c_j = b$, debe existir $f(a^+)$ o $f(b^-)$ respectivamente.

COROLARIO. Si f es seccionalmente continua en $I = [a; b]$, entonces f es integrable en I .

Ejemplo 39. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ x^3, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$.

Se pide:

- Trace la gráfica de f .
- f es integrable en $[-2; 2]$?
- Calcule $\int_{-2}^2 f(x) dx$.
- Halle $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$, $x \in [-2; 2]$ y trace su gráfica.
- Determine el conjunto donde F es derivable y halle $F'(x)$.

Solución

- La gráfica de f se muestra en la Fig. 2.15.
- f es integrable en $[-2; 2]$ porque f es seccionalmente continua en $[-2; 2]$ (f es discontinua en $x = -1$, en $x = 1$ y en $x = 2$; pero en estos puntos existen los límites laterales. En $x = 2$ existe el límite lateral por izquierda).

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (-2) dx + \int_{-1}^1 x^3 dx + \int_1^2 2 dx = -2 + 0 + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$d) \text{ Si } x \in [-2; -1] \Rightarrow F(x) = \int_{-2}^x (-2) dt = -2x - 4$$

$$\text{Si } x \in [-1, 1] \Rightarrow F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt = \int_{-2}^{-1} (-2) dt + \int_{-1}^x t^3 dt = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{4}$$

$$\text{Si } x \in (1; 2) \Rightarrow F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt = \int_{-2}^{-1} (-2) dt + \int_{-1}^1 t^3 dt + \int_1^x 2 dt = 2x - 4$$

$$\text{Por tanto, } F(x) = \begin{cases} -2x - 4, & -2 \leq x < -1 \\ (x^4 - 9)/4, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 4, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

La gráfica de F se muestra en la Fig. 2.16.

$$f) F'(x) = \begin{cases} -2, & -2 \leq x < -1 \\ x^3, & -1 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Luego, F es derivable en $[-2; 2)$ excepto en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.

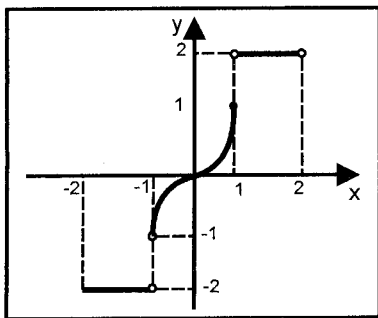


Fig. 2.15

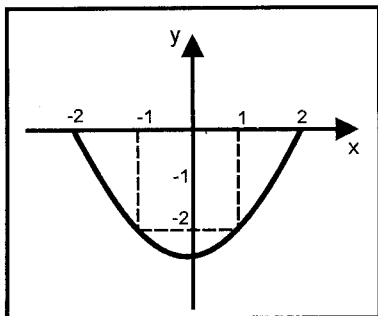


Fig. 2.16

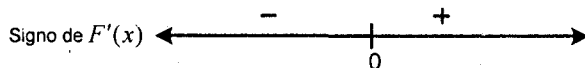
Ejemplo 40. Trace la gráfica de $F(x) = \int_0^x 2te^{-t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Solución

i) $D(F) = \mathbb{R}$

ii) Intersecciones con el eje x : $P(0; 0)$, pues $F(0) = 0$.

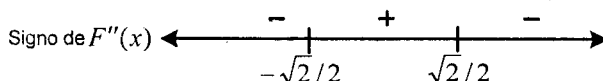
iii) $F'(x) = 2xe^{-x^2}$. El único punto crítico es $x = 0$ y se tiene



Luego, F es creciente en $(0; +\infty)$ y F es decreciente en $(-\infty; 0)$. El valor mínimo relativo es $F(0) = 0$.

iv) $F''(x) = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$.

Los puntos críticos de inflexión son $x = \sqrt{2}/2$ y $x = -\sqrt{2}/2$.



Por tanto, F es cóncava hacia abajo en $(-\infty; -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2; +\infty)$ y cóncava hacia arriba en $(-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$. Las abscisas de los puntos de inflexión de F son $x = \sqrt{2}/2$ y $x = -\sqrt{2}/2$.

v) Integrando se obtiene que $F(x) = 1 - e^{-x^2}$, por lo que $y = 1$ es asíntota horizontal. La gráfica de F se muestra en la fig. 2.17.

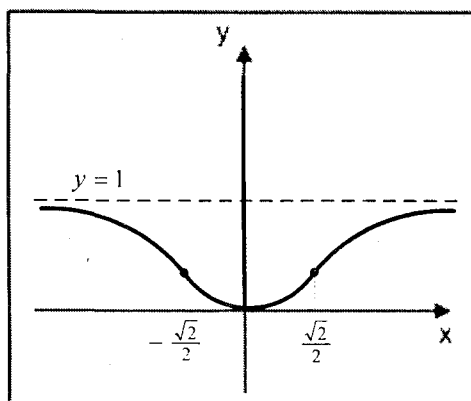


Fig. 2.17

EJERCICIOS

I. Calcule el valor de las siguientes integrales:

$$1. \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 + 8x + 8} \quad R. \frac{\pi}{16} \quad 2. \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x - 5} \quad R. -\frac{1}{6} \ln 2$$

$$3. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \quad R. \frac{\pi}{4} \quad 4. \int_0^1 x^8 e^{-x^3} dx \quad R. \frac{2}{3} - \frac{5}{3e}$$

$$5. \int_0^{\pi} \sinh x \sin x dx \quad R. \frac{1}{2} \sinh \pi \quad 6. \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \tan^7 x dx \quad R. 0$$

$$7. \int_0^a \frac{x^{5/2} dx}{\sqrt{a-x}} \quad R. \frac{5\pi a^3}{16} \quad 8. \int_0^2 \frac{x^5 dx}{(1+x^3)^{3/2}} \quad R. \frac{8}{9}$$

$$9. \int_1^2 \frac{dx}{x^6(65-x^6)^{1/6}}$$

$$R. \frac{1023}{12300}$$

$$10. \int_1^0 x^8(1-x^3)^{5/4} dx$$

$$R. -\frac{128}{5967}$$

$$11. \int_0^1 x^4(1-x^2)^{3/2} dx$$

$$R. \frac{2\pi}{256}$$

$$12. \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{2-x} dx$$

$$R. \frac{\pi}{4}$$

$$13. \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$R. \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$14. \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$$

$$R. \frac{e-2}{2}$$

$$15. \int_0^1 \ln \sqrt{2-x} dx$$

$$R. \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$16. \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

$$R. \frac{\pi}{3}$$

$$17. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot x (\ln \sin x) dx$$

$$R. \frac{1}{2} \left[\ln^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right) - \ln^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

$$18. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\tan x} dx}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}}$$

$$R. -\frac{\pi}{12} \quad (\text{Sug: } u = \frac{\pi}{2} - x)$$

$$19. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\tan^5 x| dx$$

$$R. \frac{3}{2} + \ln 2$$

$$20. \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| dx$$

$$R. 4\sqrt{2}$$

$$21. \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$R. \frac{\pi^2}{4}$$

$$22. \int_{-2}^4 \left| \frac{x+1}{x+6} \right| dx$$

$$R. 5 + 5 \ln \frac{5}{8}$$

$$23. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sec x} dx}{\sqrt{\sec x} + \sqrt{\csc x}}$$

$$R. \frac{\pi}{12} \quad (\text{Sug: } u = \frac{\pi}{2} - x)$$

- II. Si $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx = A$, calcule el valor de la integral $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{x+1} dx$ en función de A .

$$R. \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi+2} - A \right)$$

Sugerencia: exprese $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx$.

Luego, calcule cada una de las dos integrales usando integración por partes y finalmente haga el cambio de variable $x = 2u$.

- III. Si $k = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$, exprese los valores de las siguientes integrales en función de k .

1. $\int_{a-1}^a \frac{e^{-x}}{x-a+1} dx$ $R. -ke^{-a}$ (Sug: $u = a - x - 1$)

2. $\int_0^1 \frac{x e^{x^2}}{x^2+1} dx$ $R. \frac{1}{2}k$

3. $\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$ $R. k + 1 - \frac{1}{2}e$

4. $\int_0^1 e^x \ln(1+x) dx$ $R. e \ln 2 - k$

IV. Ejercicios diversos.

1. Calcular $f(0)$ sabiendo que $f(\pi) = 2$ y $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5$.

$$R. 3$$

2. Pruebe que $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} + \int_a^b \frac{\cos x}{x^2} dx$.

3. Si $f(x) = \begin{cases} 12x - 12, & \text{si } x \leq 1 \\ 6x^2 - 6, & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $g(x) = \int_{-1}^{2x} f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Calcule el valor de $\int_{-2}^4 g(x) dx$.

$$R. 3697/4$$

4. Si n es cualquier número natural, calcule el valor de

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}} dx$$

$$R. \pi$$

5. Calcule el valor de las siguientes integrales:

a) $\int_{-1/2}^{1/2} \left[\cos(\sin x) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + 3x + 4 \right] dx$ R. 4

b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x \, dx$ R. 2

c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{81} \cos(x^9) \, dx$ R. 0

d) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [x^{14} \sin(x^7)] \, dx$ R. 3π

e) $\int_{-2}^2 [(x^5 + x^3 + x)\sqrt{1+x^4} + 3] \, dx$ R. 12

6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si se sabe que $\int_{-10}^6 f(t) dt = 6$, calcule

$$\int_{-4}^4 f(2x-2) \, dx.$$

7. Sea $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -1, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ x-3, & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$

a) Esboce la gráfica de f .

b) Calcule $\int_0^4 f(x) dx$.

c) Calcule $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in [0; 4]$.

d) Trace la gráfica de F .

e) Determine en qué puntos F es derivable.

8. Sea $F(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}}{1+t^2} dt$.

a) Pruebe que F es función impar.

b) Pruebe que $F(x) \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ = [0; +\infty)$.

9. Calcule el valor de $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt[5]{\cos x}}{\sqrt[5]{\sin x} + \sqrt[5]{\cos x}} dx$.

10. La ecuación paramétrica de una curva es $\begin{cases} x = \int_1^t \frac{\cos z}{z} dz \\ y = \int_1^t \frac{\sin z}{z} dz \end{cases}$, $t \geq 1$. Halle $\frac{dy}{dx}$.

11. La función f y su inversa f^{-1} son continuas y $f(0) = 0$. Pruebe que

$$\int_0^5 f(x) dx + \int_0^{f(5)} f^{-1}(t) dt = 5 f(5)$$

12. Calcule el valor de $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

13. Calcule el valor de $\int_{-3}^3 \left| \frac{x^2 - 4}{x^2 - 25} \right| dx$.

14. Calcule el valor de $\int_{-3}^3 \frac{x^2 - 4}{|x^2 - 16|} dx$.

15. Sea f una función continua tal que $f'(x) < 0$ en $[1; 4]$.

Si $f(1) = -2$, $f(4) = -6$ y $\int_1^4 f(x) dx = -10$, calcule el valor de

$$\int_{-6}^{-2} f^{-1}(x) dx. \quad R. 12$$

16. Si $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x^3}, & x \geq 0 \end{cases}$, calcule $\int_{-3}^1 [f(x) - x] dx$.

17. Calcule $\int_0^{2\pi} (|\operatorname{sen} x| + x) dx$.

18. Calcule $\int_0^{e^2-1} [4 - 2 \ln(x+1)] dx$. R. $2(e^2 - 3)$

19. Calcule $\int_{-1}^5 |x^3 - 4x| dx$.

20. Calcule $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}$. R. $\frac{15\pi + 44}{96}$

21. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \operatorname{sen}(t-1)^2 dt}{(1-x)^3}$. R. $-\frac{1}{3}$

22. Calcule $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + [\tan x]^{\sqrt{2}}}$. R. $\frac{\pi}{4}$

Sugerencia: hacer $u = \frac{\pi}{2} - x$.

2.10 CÁLCULO APROXIMADO DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Para calcular una integral definida por la fórmula de Newton-Leibnitz se necesita hallar una antiderivada del integrando; pero en el capítulo I hemos mencionado que no toda función continua tiene una antiderivada expresada mediante funciones elementales, por lo que es necesario los métodos aproximados para su cálculo. En esta sección tendremos en cuenta que, por el teorema de Darboux,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta_i x, \text{ donde } P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

es una partición de $[a; b]$, $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ y $t_i \in [x_{i-1}; x_i]$.

2.10.1 APROXIMACIÓN POR RECTÁNGULOS

Sea $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

Sea $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ una partición de $[a; b]$ de tal manera que el intervalo $[a; b]$ quede dividido en n partes iguales. La longitud de cada uno de los subintervalos es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Sea $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Cada una de las sumas

$$y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_{n-1} \Delta x$$

$$y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + y_3 \Delta x + \dots + y_n \Delta x$$

expresa aproximadamente la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

Luego,

$$\int_a^b f(x)dx \cong \Delta x(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \quad (20)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \Delta x(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) \quad (21)$$

Teniendo en cuenta que $y_k \Delta x$ es el área algebraica del rectángulo de base Δx y altura y_k , en la figura 2.18 se muestra el polígono rectangular cuya área algebraica es la aproximación del valor de $\int_a^b f(x)dx$ usando la fórmula 19.

El error que se comete al calcular el valor de la integral por la fórmula de los rectángulos (19) ó (20) es menor cuanto mayor es el número n .

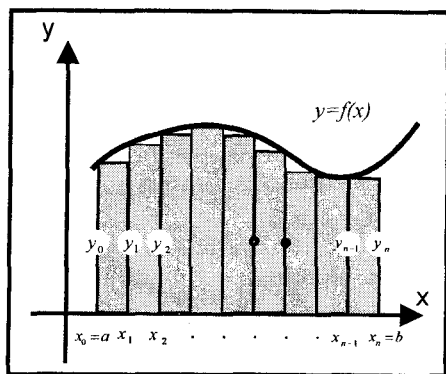


Fig. 2.18

2.10.2 APROXIMACIÓN POR TRAPÉCIOS

En este caso, se usan trapecios rectangulares en lugar de los rectángulos considerados en el ítem anterior. Sean los puntos $P_0(x_0; y_0)$, $P_1(x_1; y_1)$, ..., $P_n(x_n; y_n)$, donde x_0, x_1, \dots, x_n , y_0, y_1, \dots, y_n han sido definidos en el ítem anterior. Consideramos los n trapecios rectangulares T_1, T_2, \dots, T_n que están limitados por las cuerdas $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ respectivamente. Como las áreas algebraicas de estos trapecios son, respectivamente, iguales a

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x, \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x, \dots, \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x; \text{ entonces}$$

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x$$

$$\int_a^b f(x) dx \cong \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \Delta x \quad (22)$$

En la figura 2.19 se muestra el polígono rectangular cuya área algebraica es la aproximación del valor de $\int_a^b f(x) dx$ usando la fórmula 22.

Igual que en el caso anterior, cuanto mayor es el número n , es mejor la aproximación al valor de la integral.

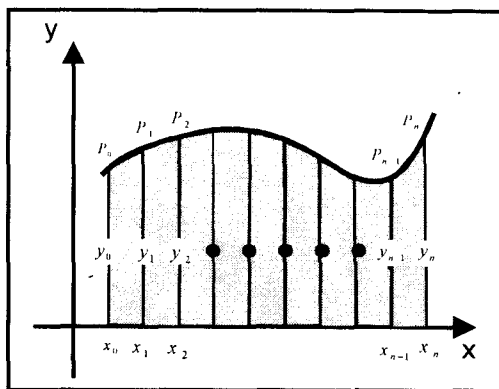


Fig. 2.19

2.10.3 APROXIMACIÓN POR PARÁBOLAS (FÓRMULA DE SIMPSON)

Proposición 5. Sea $g(x) = Ax^2 + Bx + C$, donde $x \in [a; b]$, $y_0 = g(a)$, $y_1 = g\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $y_2 = g(b)$. Entonces

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{\Delta x}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2], \text{ donde } \Delta x = \frac{b-a}{2} \quad (23)$$

Demostración

Por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_a^b$$

Luego de efectuar las operaciones indicadas se demuestra que

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{\Delta x}{3} [y_2 + 4y_1 + y_0].$$

Considerando esta proposición, si la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ pasa por los puntos

$$P_0(a; y_0), P_1\left(\frac{a+b}{2}; y_1\right), P_2(b; y_2)$$

entonces el área algebraica bajo la parábola está dada por (23).

Sea f una función continua en $[a; b]$. Para hallar una aproximación de $\int_a^b f(x)dx$, la idea básica es aproximar la gráfica de f por arcos de parábolas. Para esto, dividimos el intervalo $[a; b]$ en n partes iguales, donde n es par. Sean $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ los extremos de los subintervalos, y $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

El área algebraica bajo la parábola que pasa por los puntos $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ está dado por $(y_0 + 4y_1 + y_2)\Delta x/3$. Así mismo, el área algebraica bajo la parábola que pasa por los puntos $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ y $(x_4; y_4)$, está dado por $(y_2 + 4y_3 + y_4)\Delta x/3$ y así sucesivamente, hasta llegar al área algebraica bajo la parábola que pasa por los puntos $(x_{n-2}; y_{n-2})$, $(x_{n-1}; y_{n-1})$, $(x_n; y_n)$ está dado por $(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\Delta x/3$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\cong \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{\Delta x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{\Delta x}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ \int_a^b f(x)dx &\cong \frac{\Delta x}{3} [(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})] \quad (24) \end{aligned}$$

Esta fórmula es llamada **fórmula de Simpson**.

Ejemplo 41. Para $n = 10$, calcule por aproximación el valor de

$$\int_0^1 \frac{4 dx}{1+x^2}$$

Solución

Si $n = 10$, entonces $\Delta x = (1 - 0)/10 = 0,1$.

x_i	$f(x_i) = \frac{4}{1+x^2}$	x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	$y_0 = 4,0$	$x_6 = 0,6$	$y_6 = 2,94117647$
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 3,96039604$	$x_7 = 0,7$	$y_7 = 2,68456375$
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 3,84615384$	$x_8 = 0,8$	$y_8 = 2,43902439$
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 3,66972477$	$x_9 = 0,9$	$y_9 = 2,20994475$
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 3,44827586$	$x_{10} = 1$	$y_{10} = 2,0$
$x_5 = 0,5$	$y_5 = 3,2$		

Por la fórmula (20) (aproximación por rectángulos),

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \cong 0,1[y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_9] = 3,239925989$$

Por la fórmula (21) (aproximación por rectángulos),

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \cong 0,1[y_1 + y_2 + \dots + y_9 + y_{10}] = 3,039925989$$

Por la fórmula (22) (aproximación por trapecios),

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \cong 0,1 \left[\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_9 \right] = 3,139925989$$

Por la fórmula (23) (aproximación por parábolas o método de Simpson),

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \cong \frac{0,1}{3} [y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] = 3,141592614$$

Este último valor comparado con el valor real de la integral

$$\int_0^1 \frac{4 dx}{1+x^2} = \pi = 3,14159265..$$

es exacto hasta la séptima cifra decimal.

EJERCICIOS

Calcule los valores aproximados de las siguientes integrales:

1. $\int_1^5 \frac{dx}{x}$, por la fórmula de los trapecios y la de Simpson ($n = 2$).

R. 1,6182 y 1,6098 respectivamente

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, por la fórmula de los trapecios y la de Simpson ($n = 10$).

R. 0,69377 y 0,69315 respectivamente

3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx$, por la fórmula de los trapecios ($n = 6$).

R. 0,8109

4. $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$, por la fórmula de Simpson ($n = 4$).

R. 0,8111

3

INTEGRALES IMPROPIAS

En la definición de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, fueron establecidas las dos restricciones siguientes:

1° El intervalo $I = [a; b]$ es acotado

2° f es acotada en ID

Ahora trataremos de librarnos de estas restricciones, extendiendo el concepto de integral definida al caso en donde el intervalo de integración es infinito o el caso en donde la función del integrando f presenta discontinuidad infinita en $[a; b]$.

Las integrales que tienen estas características se llaman **integrales impropias** y son de dos tipos:

Tipo 1: Integrales impropias con límites infinitos.

Tipo 2: Integrales impropias con límites finitos (con discontinuidades infinitas).

3.1 INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES INFINITOS

Definición 1. Sea $f: I = [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo I . La integral impropia de f de a a $+\infty$ se denota y se define como

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

Se dice que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **converge** cuando el límite existe.

Si el límite no existe o es infinito, se dice que la integral impropia **diverge**.

Observación 1. Como vimos en el capítulo anterior, si $f(x) \geq 0$, la integral definida $\int_a^t f(x)dx$ representa el área de la región plana limitada por la gráfica de f , el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = t$. Luego, cuando la integral impropia es convergente podemos interpretar que el valor de la integral es el área de la región plana infinita que se encuentra a la derecha de la recta $x = a$ y está comprendida entre la gráfica de f y el eje x (Fig. 3.1).

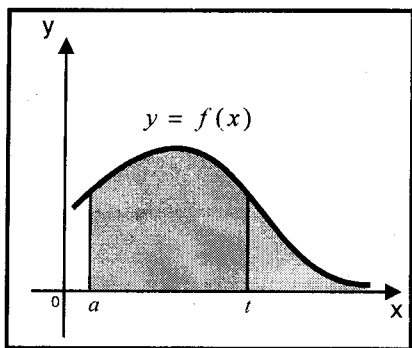


Fig. 3.1

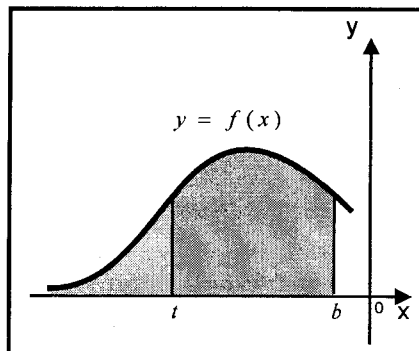


Fig. 3.2

Definición 2. Sea $f: I = \langle -\infty; b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo I . La integral impropia de f de $-\infty$ a a se escribe y se define como

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

Si este límite existe, se dice que la integral impropia es **convergente**; en caso contrario se dice que es **divergente**.

Por otro lado, si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in I$ y la integral impropia $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ converge, entonces el valor de la integral representa el área de la región plana infinita ubicada a izquierda de la recta $x = b$ y está limitada por la gráfica de f y el eje x (Fig. 3.2).

Definición 3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $\langle -\infty; +\infty \rangle$. La integral impropia de f de $-\infty$ a $+\infty$ se escribe como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

donde b es cualquier número real.

La integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ es **convergente** si tanto $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ como $\int_b^{+\infty} f(x) dx$ son convergentes, y es **divergente** si alguna de las integrales impropias del lado derecho diverge.

Ejemplo 1. Determine si la integral $\int_{-\infty}^2 (x-2)e^x dx$ converge o diverge.

Solución

En esta integral se aplica la integración por partes con $u = x - 2$ y $dv = e^x dx$.

De la definición de la integral impropia, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^2 (x-2)e^x dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^2 (x-2)e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} [(x-2)e^x - e^x]_t^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [-e^2 - (t-2)e^t + e^t] = -e^2 - \lim_{t \rightarrow -\infty} (t-2)e^t\end{aligned}$$

El último límite es de la forma $\infty \cdot 0$. Aplicando la Regla de L'Hôpital, se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (t-2)e^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t-2}{e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = 0$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\int_{-\infty}^2 (x-2)e^x dx = -e^2$$

En conclusión, la integral impropia es convergente y converge a $-e^2$.

Ejemplo 2. Determine si la integral $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 5} dx$ converge o diverge.

Solución

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 5} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \int_1^t \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 + 5} dx = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln|x^3 + 3x^2 + 5|]_1^t \\ &= \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln|t^3 + 3t^2 + 5| - \ln 9] = \frac{1}{3} (+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

Por tanto, la integral impropia dada diverge.

Ejemplo 3. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Solución

Eligiendo $b = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan x]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan(a)] + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctan(b)] = -(-\pi/2) + \pi/2 = \pi\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ es convergente y converge a π .

En la Fig. 3.3 se muestra la gráfica de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

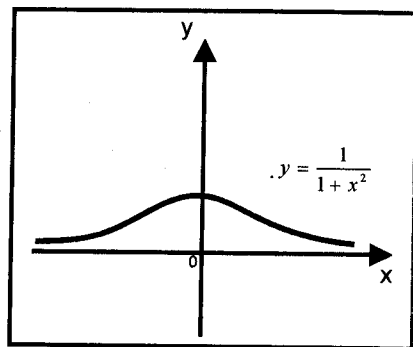


Fig. 3.3

Ejemplo 4. Muestre que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Solución

Para $p \neq 1$, se tiene que $\int_1^t \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^t = \frac{1}{(1-p)t^{1-p}} - \frac{1}{1-p}$.

Luego,

a) Si $p > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(1-p)t^{p-1}} - \frac{1}{1-p} \right] = \frac{1}{p-1}$

y la integral considerada es convergente.

b) Si $p < 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = +\infty$

y la integral considerada es divergente.

c) Si $p = 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln t] = +\infty$

y así la integral dada es divergente.

En resumen, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

3.2 INTEGRALES IMPROPIAS CON LÍMITES FINITOS

Definición 4. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (donde $I = [a; b)$) una función continua en I y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$. La integral impropia de f de a a b se define como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Si el límite existe, se dice que la integral impropia es **convergente**; en caso contrario se dice que es **divergente**.

La definición dada también es equivalente a

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a; b]$, y la integral impropia $\int_a^b f(x) dx$ es convergente, el valor de esta integral representa el área de la región infinita limitada por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = a$ \wedge $x = b$ (Fig. 3.4).

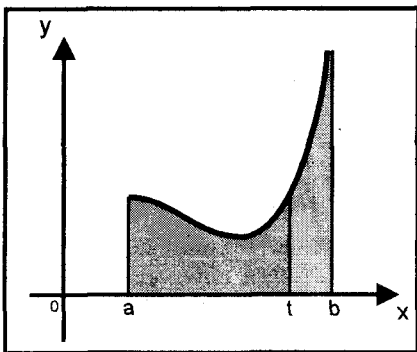


Fig. 3.4

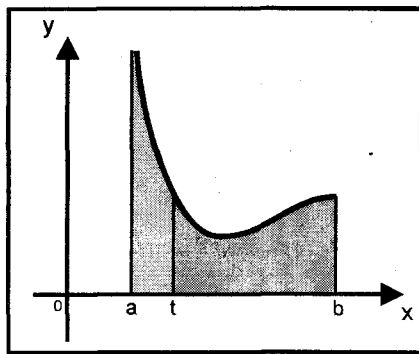


Fig. 3.5

Definición 5. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (donde $I = \langle a; b \rangle$) una función continua en I y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$. La integral impropia de f de a a b se escribe como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Si el límite existe, se dice que la integral impropia es **convergente**; en caso contrario se dice que es **divergente**.

La definición dada también es equivalente a

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ y la integral impropia $\int_a^b f(x) dx$ es convergente, el valor de esta integral representa el área de la región infinita limitada por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x = a$ \wedge $x = b$ (Fig. 3.5).

Definición 6. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (donde $I = [a; b]$) una función continua en I , excepto en algún punto $d \in \langle a; b \rangle$ en donde $\lim_{x \rightarrow d^-} f(x) = \infty$ ó $\lim_{x \rightarrow d^+} f(x) = \infty$. Entonces se define

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

La integral impropia $\int_a^b f(x) dx$ es convergente si tanto $\int_a^d f(x) dx$ como $\int_d^b f(x) dx$ son convergentes, y es divergente si alguna de las integrales impropias del lado derecho diverge.

Observación 2. Si la función f definida en $\langle a; b \rangle$ (a puede ser $-\infty$ y b puede ser $+\infty$) tiene dentro del intervalo $\langle a; b \rangle$ un número finito de puntos de discontinuidad infinita c_1, c_2, \dots, c_n , entonces la integral de la función f en $\langle a; b \rangle$ se define como

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \dots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx$$

siempre que cada una de las integrales impropias del segundo miembro sean convergentes. Si por lo menos una de las integrales diverge, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \text{ también diverge}$$

Ejemplo 5. Determine, si existe, $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ es continua en $\langle 1; 2 \rangle$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

Luego,

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} [2\sqrt{x-1}]_t^2 = \lim_{t \rightarrow 1^+} [2 - 2\sqrt{t-1}] = 2$$

Por lo tanto, la integral impropia I es convergente y converge a 2.

Ejemplo 6. Muestre que la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ converge si $0 < p < 1$ y diverge si $p \geq 1$.

Solución

a) Para $0 < p < 1$, nos queda

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-p} - \frac{t^{1-p}}{1-p} \right] = \frac{1}{1-p}$$

y la integral considerada es convergente.

b) Para $p = 1$, $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln t) = +\infty$

y la integral dada es divergente.

c) Para $p > 1$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{(p-1)t^{p-1}} - \frac{1}{p-1} \right] = +\infty$

y la integral es divergente.

Ejemplo 7. Calcule, si existe, la integral $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cot \theta \, d\theta$.

Solución

Se observa que la función $f(\theta) = \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ tiene discontinuidad infinita en $\theta = 0$. Así, la integral dada se escribe como

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cot \theta \, d\theta = \int_{-\pi/4}^0 \cot \theta \, d\theta + \int_0^{\pi/4} \cot \theta \, d\theta$$

Puesto que la integral

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^0 \cot \theta \, d\theta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\pi/4}^{-\varepsilon} \cot \theta \, d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln|\sin \theta|]_{-\pi/4}^{-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln|-\sin(\varepsilon)| - \ln(\sqrt{2}/2)] = -\infty \end{aligned}$$

es divergente, entonces la integral dada también es divergente

Ejemplo 8. Calcule $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} \, dx$ (si existe).

Solución

La función $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ tiene discontinuidad infinita en $x = 0$. Entonces, usando el método de integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{e^{1/x}}{x^3} \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x} \right]_{-1}^{-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[e^{-1/\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-1/\varepsilon} - 2e^{-1} \right] = -\frac{2}{e} \end{aligned}$$

NOTA: El límite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/\varepsilon}}{\varepsilon}$ es de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la Regla de L'Hôpital, resulta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/\varepsilon}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{e^{1/\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1/\varepsilon^2}{e^{1/\varepsilon}(-\frac{1}{\varepsilon^2})} = 0$$

Ejemplo 9. Calcule, si existe, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-2)}$.

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ tiene discontinuidad infinita en $x = 0$ y $x = 2$.

Eligiendo los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$, la integral dada se escribe

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-2)} &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x(x-2)} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x-2)} + \int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)} + \int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)} + \\ &+ \int_2^3 \frac{dx}{x(x-2)} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(x-2)}\end{aligned}$$

Puesto que la integral

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x-2)} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{dt}{(t-1)^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| \right]_{-1}^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t} \right| - \frac{1}{2} \ln 3 \right] = +\infty\end{aligned}$$

es divergente, entonces la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-2)}$ es divergente.

Ejemplo 10. Determine el valor de n para el cual la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$$

es convergente. Además, calcule la integral para dicho valor de n .

Solución

Al aplicar la definición de la integral impropia, se tiene

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{(t+1)^n}{(2t^2+n)^{3/4}} - \ln \frac{2^n}{(2+n)^{3/4}} \right]\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t+1)^n}{(2t^2+n)^{3/4}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t+1)^n}{\sqrt[4]{8t^6 + 12nt^4 + 6n^2t^2 + n^3}}$$

entonces este límite existe cuando $n = \frac{3}{2}$ ó $n < \frac{3}{2}$

$$\text{a) Si } n = \frac{3}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{(t+1)^{3/2}}{(2t^2 + \frac{3}{2})^{3/4}} \right) - \ln \left(\frac{2^{3/2}}{(2 + \frac{3}{2})^{3/4}} \right) \right] = \frac{3}{4} \ln \frac{7}{4} - \frac{3}{2} \ln 2$$

$$\text{b) Si } n < \frac{3}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{(t+1)^n}{(2t^2+n)^{3/4}} - \ln \frac{2^n}{(2+n)^{3/4}} \right] = -\infty$$

Por tanto, el valor de n es $\frac{3}{2}$ y el valor de la integral es $\frac{3}{4} \ln \frac{7}{4} - \frac{3}{2} \ln 2$.

EJERCICIOS

Determine si las siguientes integrales son convergentes o divergentes. Si es convergente, calcule su valor.

1. $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x \, dx$

R. diverge

2. $\int_1^{+\infty} \frac{4}{x^3} \, dx$

R. 2

3. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$

R. 1

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-x^2} \, dx$

R. 1

5. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^{3/5}}$

 R. $-\frac{5\sqrt[5]{4}}{2}$

6. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

R. 2

7. $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^3}$

R. diverge

8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 1}$

 R. $\frac{\pi}{2}$

9. $\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x^2 + 9)^2}$

 R. $\frac{1}{18}$

10. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

 R. $\frac{\pi}{2}$

11. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

R. 0

12. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$

R. diverge

13. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$ R. diverge
14. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1.01}}$ R. 100
15. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \sin x}$ R. diverge
16. $\int_1^{+\infty} \frac{x^5 dx}{(1 + x^3)^{7/4}}$ R. diverge
17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ R. π
18. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx$ R. $\frac{b}{a^2 + b^2}$ ($a > 0$)
19. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx$ R. $\frac{a}{a^2 + b^2}$ ($a > 0$)
20. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ R. $\frac{\pi}{2}$
21. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx$ R. $\frac{\pi^2}{8}$
22. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$ R. $\frac{2\pi}{2\sqrt{3}}$
23. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$ R. diverge
24. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$ R. 2
25. $\int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^{-2/3}} dx$ R. $2(2\sqrt{2} - 1)$

$$26. \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx \quad R. \text{ diverge}$$

$$27. \int_0^{+\infty} \frac{-1-2x}{3x^{2/3}(x-1)^2} dx \quad R. \text{ diverge}$$

$$28. \int_{-2}^0 \frac{dx}{|\sqrt[3]{x+1}|} \quad R. 3$$

$$29. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad R. \frac{\pi}{2}$$

$$30. \int_{-1}^1 \frac{(1-x^3)^{1/3}}{x^5} dx \quad R. \text{ diverge}$$

$$31. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx \quad R. 0$$

$$32. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{4/3}} \quad R. \text{ diverge}$$

$$33. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}} \quad R. \text{ diverge}$$

$$34. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx \quad R. \frac{1}{3}$$

$$35. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+b^2)(b^2+x^2)} \quad R. \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

$$36. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x-e^x)} dx \quad R. 1$$

$$37. \int_0^a \frac{a^2 - e^2 x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad R. \frac{\pi a^2}{2} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$$

$$38. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} \quad R. \pi$$

39. $\int_0^{\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}}$

R. $2\sqrt{2}$

40. $\int_0^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

R. 4

41. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

R. π

42. $\int_{-1}^0 \frac{x^5}{\sqrt{1 + x^3}} dx$

R. $-\frac{4}{9}$

43. $\int_9^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 6x)^{3/2}}$

R. $\frac{1}{18}(3 - \sqrt{3})$

44. $\int_1^{+\infty} \frac{x^5 \, dx}{(1 + x^3)^{5/2}}$

R. $\frac{5\sqrt{2}}{18}$

45. $\int_0^5 \frac{dx}{(x-1)(x^2 - 8x + 15)}$

R. diverge

46. $\int_1^2 \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x-1}}$

R. $\frac{192}{35}$

47. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-3x} \, dx$

R. $\frac{2}{27}$

48. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2 - 4}$

R. diverge

49. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx$

R. $n!$

50. Sabiendo que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, halle el valor de la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \, dx$.

R. $\sqrt{2\pi}$

51. Muestre que $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converge si $0 < p < 1$ y diverge si $p \geq 1$.

52. Si $G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^a)(1+x^2)}$, calcule $G(0)$, $G(1)$, $G(2)$.

R. $\pi/4$; $\pi/4$; $\pi/4$

53. Sabiendo que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, calcule el valor de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

R. $\pi/2$

54. Esboce la gráfica de la función $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ en los siguientes casos:

a) $f(t) = \begin{cases} |t|, & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{1}{t^2}, & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$

55. Sea $f(x) = \begin{cases} mx^2, & \text{si } |x| \leq 3 \\ 0, & \text{si } |x| > 3 \end{cases}$

Determine m de modo que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. R. $m = \frac{1}{18}$

3.3 INTEGRALES IMPROPIAS CON INTEGRANDOS NO NEGATIVOS

Proposición 1. Sea f una función no negativa en $[a; b)$ (esto es, $f(x) \geq 0$) e integrable en $[a; t]$ para todo $t \in [a; b)$.

Si la función $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ es acotada en $[a; b)$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge.

Demostración

Como $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a; b)$, entonces $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ es creciente en $[a; b)$.

Por hipótesis, $F(t)$ es acotada. Entonces $F(t)$ es creciente y acotada en $[a; b)$.

Por tanto, $\lim_{t \rightarrow b^-} F(t)$ existe y es finito, es decir, $\int_a^b f(x)dx$ es convergente.

Proposición 2 (Criterio de Comparación)

Sean f y g funciones tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a; b)$, e integrables en $[a; t]$, $\forall t \in [a; b)$. Luego,

a) Si $\int_a^b g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge.

b) Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

Demostración

Se sigue inmediatamente de la proposición 1 y de la desigualdad

$$\int_a^t f(x)dx \leq \int_a^t g(x)dx, \forall t \in [a; b)$$

Ejemplo 11. Verifique si $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^4}}$ converge o diverge.

Solución

Como $0 < \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^4}} \leq \frac{1}{x^6}$, $\forall x \in [2; +\infty)$, y $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^6}$ es convergente (ver ejemplo 2, $p = 6$), entonces se concluye que $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^4}}$ es convergente.

Ejemplo 12. Analice el comportamiento de la integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

Solución

Como $0 < \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0; 1]$, y $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ es convergente (ver ejemplo 4, $p = 1/2$), se concluye que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$ es convergente.

Ejemplo 13. Verifique si $\int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$ es convergente o divergente.

Solución

Como $0 \leq -\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}$, $\forall x \in (-\infty; -3]$, y $\int_{-\infty}^{-3} -\frac{dx}{x}$ diverge, entonces

$\int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$ es divergente.

Definición 7. Se dice que la integral impropia $\int_a^b f(x) dx$ es **absolutamente convergente** cuando $\int_a^b |f(x)| dx$ es convergente.

Proposición 3. Si la integral $\int_a^b f(x) dx$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Demostración

Como $0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$, se sigue, por la proposición anterior, que $|f(x)| - f(x)$ es convergente. Luego,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx - \int_a^b [|f(x)| - f(x)] dx \text{ converge}$$

Ejemplo 14. Analice si $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx$ es convergente o divergente.

Solución

La integral dada es absolutamente convergente, pues

$$\left| \frac{\cos(x^2)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}, \forall x \in [1; +\infty), \text{ y la integral } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ es convergente.}$$

Luego, por la proposición anterior, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx$ es convergente.

Proposición 4 (Criterio del Límite)

Sean f y g funciones no negativas integrables en $[a; t]$, $\forall t \in [a; b]$, y supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = r.$$

a) Si $0 < r < +\infty$, entonces las integrales impropias

$$F = \int_a^b f(x) dx \quad \text{y} \quad G = \int_a^b g(x) dx$$

son ambas convergentes o ambas divergentes.

b) Si $r = 0$ y G converge, entonces F converge.

c) Si $r = \pm\infty$ y G diverge, entonces F diverge.

Demostración. (ejercicio para el lector).

Corolario 1. Sea f una función integrable en $[a; t]$, $\forall t \in [a; +\infty)$, y supongamos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = r < +\infty$.

Luego, se tiene:

a) Si $p > 1$, entonces $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

b) Si $r \neq 0$ y $0 < p < 1$, entonces $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Corolario 2. Sea f una función integrable en $[a; t]$, $\forall t \in [a; b)$, ($b \in \mathbb{R}$) y supongamos que $\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)^p f(x) = r < +\infty$.

Luego, se tiene

a) Si $0 < p < 1$, entonces $\int_a^b f(x) dx$ converge.

b) Si $r \neq 0$ y $p \geq 1$, entonces $\int_a^b f(x) dx$ diverge.

Ejemplo 15. Analice si $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{4x^5 + x^3 - 1}}$ converge o diverge.

Solución

Considerando que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{11/2} \frac{1}{x^3 \sqrt{4x^5 + x^3 - 1}} = \frac{1}{2} \quad \left(\text{en este caso } p = \frac{11}{2} > 1 \right)$$

se concluye, por el corolario 1, que la integral $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{4x^5 + x^3 - 1}}$ converge.

Ejemplo 16. Verifique si $\int_2^5 \frac{dx}{(x^2 - x - 2)^{3/2}}$ converge o diverge.

Solución

Teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2)^{3/2} \cdot \frac{1}{(x - 2)^{3/2} (x + 1)^{3/2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ (en este caso $p = 3/2 > 1$), la integral es divergente (se usa el corolario análogo al corolario 2, reemplazando $(b - x)^p$ por $(x - a)^p$).

Ejemplo 17. Analice si $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x^9 + 8x - 10}}$ converge o diverge.

Solución

La integral converge, pues $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{2x^9 + 8x - 10}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad (p = 2 > 1)$.

EJERCICIOS

Analice la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias.

$$1. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} \quad R. \text{ converge}$$

$$2. \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2 + 3x + 4} \quad R. \text{ converge}$$

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{x^3 - 1} \quad R. \text{ converge}$$

$$4. \int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^4 + 1} dx \quad R. \text{ converge}$$

$$5. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2} \quad R. \text{ converge}$$

$$6. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{x^2 + 4}} \quad R. \text{ converge}$$

$$7. \int_2^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad R. \text{ diverge}$$

$$8. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{x^2 + x + 1}} \quad R. \text{ diverge}$$

$$9. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-2x} dx}{x^2 + 3x + 5} \quad R. \text{ converge}$$

$$10. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x^2) dx \quad R. \text{ converge}$$

$$11. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad R. \text{ converge}$$

$$12. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1 + e^x)} \quad R. \text{ converge}$$

13. $\int_4^5 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$ R. converge

14. $\int_1^3 \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2-1}} dx$ R. converge

15. $\int_0^1 x \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) dx$ R. converge

16. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1} \sqrt[5]{x^4-1}}$ R. converge

17. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x^3) dx}{\sqrt{x}}$ R. converge

18. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} dx$ R. converge

19. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} dx$ R. converge

20. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4+5x^3+x^2+x+1}$ R. converge

4

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

En este capítulo abordaremos algunas aplicaciones de la integral definida a los problemas geométricos, físicos y económicos.

4.1 ÁREA DE REGIONES PLANAS

CASO I: Sea $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $f(x) \geq 0, \forall x \in I$. De la interpretación geométrica de la integral definida se sigue que el área de la región R limitada por la gráfica de f , el eje x , las rectas $x = a$ y $x = b$ (Fig. 4.1) está dada por

$$A(R) = \left(\int_a^b f(x) dx \right) u^2$$

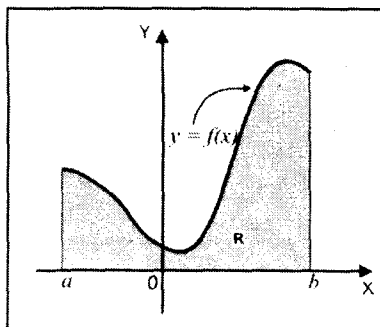


Fig. 4.1

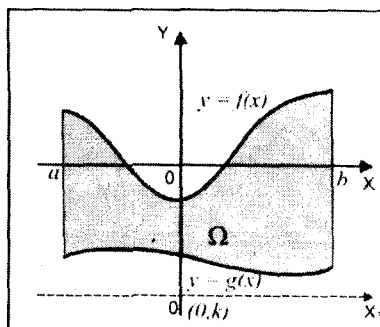


Fig. 4.2

CASO II: Sean f y g dos funciones continuas en $[a; b]$ y $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a; b]$. El área de la región Ω limitada por las rectas $x = a \wedge x = b$ y las gráficas de f y g (Fig. 4.2) está dada por:

$$A(\Omega) = \left(\int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right) u^2$$

Para demostrar esta fórmula, consideremos el número real k tal que $k \leq g(x), \forall x \in [a; b]$.

Efectuando una traslación de ejes al origen $O'(0; k)$, las nuevas ecuaciones de las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y de las rectas $x = a$ y $x = b$ son, respectivamente, $y_1 = f(x) - k$, $y_1 = g(x) - k$, $x = a$ y $x = b$ (por las fórmulas de traslación $y_1 = y - k \wedge x_1 = x$). Por lo tanto, en el nuevo sistema cartesiano $x_1 O' y_1$ se verifica

$$0 \leq g(x) - k \leq f(x) - k, \quad \forall x \in [a; b]$$

Luego, teniendo en cuenta la fórmula del caso I, se tiene

$$A(\Omega) = \int_a^b (f(x) - k) dx - \int_a^b (g(x) - k) dx$$

$$A(\Omega) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Observación 1. Si la región R está limitada por las gráficas de $x = f(y)$, $x = g(y)$, las rectas $y = a \wedge y = b$ (Fig. 4.3), donde f y g son funciones continuas en $[a; b]$ y $g(y) \leq f(y)$, $\forall y \in [a; b]$, entonces el área de la región R es

$$A(R) = \left(\int_a^b [f(y) - g(y)] dy \right) u^2$$

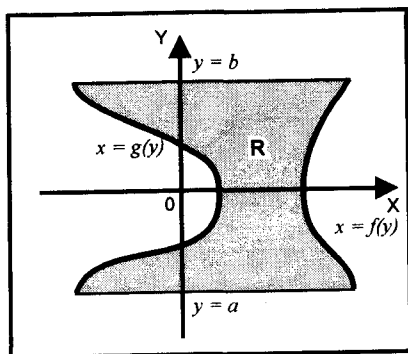


Fig. 4.3

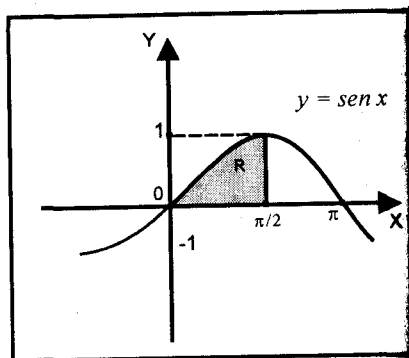


Fig. 4.4

Ejemplo 1. Calcule el área de la región limitada por

$$y = \text{sen } x, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$

Solución

De la definición dada en el caso I y de la figura 4.4, se obtiene

$$A(R) = \int_0^{\pi/2} \text{sen } x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = \left[-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right] = 1 \, u^2$$

Ejemplo 2. Calcule el área de la región S limitada por

$$y = \frac{2|x|}{1+x^2}, \text{ el eje } x \text{ y las rectas } x = -2 \text{ y } x = 1$$

Solución

Por la definición de valor absoluto, se tiene que

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Así, por la fórmula dada en el caso I y la figura 4.5, resulta

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{-2}^1 \frac{2|x|}{1+x^2} dx \\ &= - \int_{-2}^0 \frac{2x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= -[\ln(x^2+1)]_{-2}^0 + [\ln(x^2+1)]_0^1 = \ln 5 + \ln 2 = (\ln 10)u^2 \end{aligned}$$

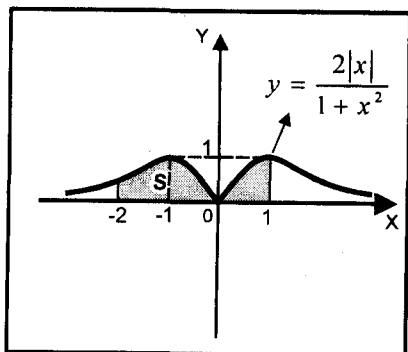


Fig. 4.5

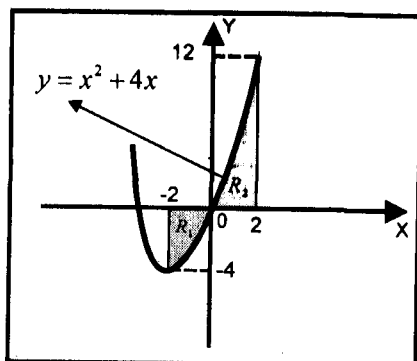


Fig. 4.6

Ejemplo 3. Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 + 4x$, el eje x y las rectas $x = -2 \wedge x = 2$.

Solución

Observando la gráfica de la región (Fig. 4.6), se tiene que para $f(x) = x^2 + 4x$ se cumple

$$f(x) \leq 0, \forall x \in [-2; 0] \text{ y } f(x) \geq 0, \forall x \in [0; 2]$$

Por tanto, el área de la región pedida se descompone en la suma de las áreas de las regiones R_1 y R_2 , es decir,

$$\begin{aligned} A(R) &= A(R_1) + A(R_2) \\ &= - \int_{-2}^0 (x^2 + 4x) dx + \int_0^2 (x^2 + 4x) dx = \frac{16}{3} + \frac{32}{3} = 16 u^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Halle el área de la región F limitada por las gráficas de

$$y = x^2, \quad y = x^3, \quad x = -1, \quad x = 2$$

Solución

En la gráfica de la región F (Fig. 4.7), se observa que

$$x^3 \leq x^2, \forall x \in [-1; 1] \quad \text{y} \quad x^2 \leq x^3, \forall x \in [1; 2]$$

Luego,

$$A(F) = \int_{-1}^1 (x^2 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx = \frac{8}{12} + \frac{17}{12} = \frac{25}{12} u^2$$

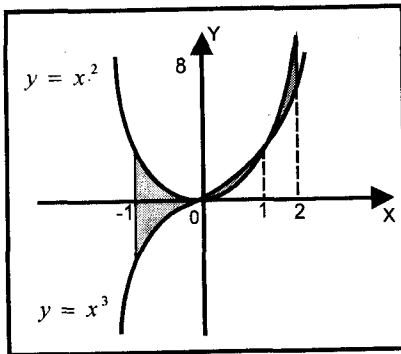


Fig. 4.7

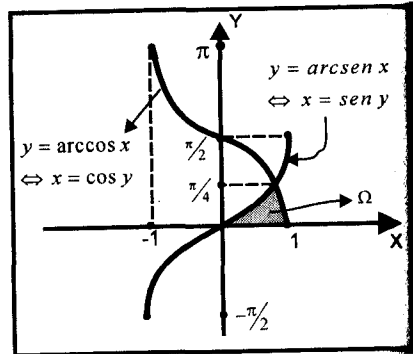


Fig. 4.8

Ejemplo 5. Halle el área de la región limitada por las gráficas de

$$y = \arcsen x, \quad y = \arccos x, \quad y = 0$$

Solución

Las gráficas de las funciones $y = \arcsen x$ y $y = \arccos x$ están dadas en la Fig. 4.8. Ahora bien, por la definición de las inversas de estas funciones, resulta

$$x = \sen y \leq x = \cos y, \forall y \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

Por consiguiente, el área de la región pedida es

$$A(\Omega) = \int_0^{\pi/4} (\cos y - \sen y) dy = (\sqrt{2} - 1) u^2$$

Este ejemplo se puede resolver usando a x como variable independiente, esto es,

$$A(\Omega) = \int_0^{\sqrt{2}/2} \arcsen x \, dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \arccos x \, dx$$

Es evidente que en este caso el procedimiento es más complicado que el anterior, por lo que recomendamos al lector escoger adecuadamente la variable independiente antes de aplicar la fórmula del área.

Ejemplo 6. Halle el área de la región R limitada por las gráficas de

$$y = 4 - x^2, \quad y = \ln(2x - 3), \quad y = 1$$

Solución

La gráfica de la región R se muestra en la fig. 4.9. Por comodidad consideramos a y como variable independiente, esto es, $x = \sqrt{4 - y} \wedge x = \frac{e^y + 3}{2}$. Luego, se obtiene

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^1 \left(\frac{e^y + 3}{2} - \sqrt{4 - y} \right) dy = \left[\frac{e^y}{2} + \frac{3}{2}y + \frac{2}{3}(4 - y)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{e}{2} + 2\sqrt{3} - \frac{13}{3} \right) u^2 \end{aligned}$$

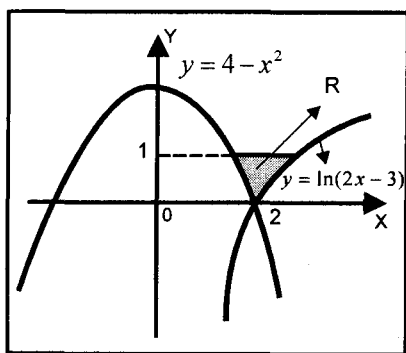


Fig. 4.9

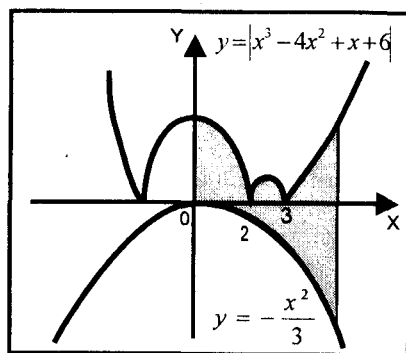


Fig. 4.10

Ejemplo 7. Halle el área de la región R limitada por las gráficas de

$$y = |x^3 - 4x^2 + x + 6|, \quad 3y + x^2 = 0, \quad x = 0, \quad x = 4$$

Solución

La gráfica de la región R se muestra en la fig. 4.10 y su área de la región es

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^4 \left[|x^3 - 4x^2 + x + 6| - \left(-\frac{x^2}{3} \right) \right] dx \\ &= \int_0^4 |x^3 - 4x^2 + x + 6| dx + \int_0^4 \frac{x^2}{3} dx \end{aligned}$$

Para hallar la integral del valor absoluto, tenemos en cuenta que

$$|x^3 - 4x^2 + x + 6| = |(x + 1)(x - 2)(x - 3)|$$

$$|x^3 - 4x^2 + x + 6| = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + x + 6, & 0 \leq x \leq 2 \\ -(x^3 - 4x^2 + x + 6), & 2 < x \leq 3 \\ x^3 - 4x^2 + x + 6, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^4 |x^3 - 4x^2 + x + 6| dx \\
 &= \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx - \int_2^3 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx + \int_3^4 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx \\
 &= \frac{22}{3} + \frac{7}{12} + \frac{47}{12} = \frac{71}{6}
 \end{aligned}$$

Por tanto, el área de la región R es

$$A(R) = \frac{71}{6} + \frac{64}{9} = \frac{341}{18} u^2 \quad \left(\int_0^4 \frac{x^2}{3} dx = \frac{64}{9} \right)$$

Ejemplo 8. Halle el área de la región Ω que se encuentra en el primer cuadrante y está limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 3$, $x - xy = 1$, $x - xy = 3$.

Solución

Se verifica fácilmente que las gráficas de las curvas se intersecan en los puntos

$$A(2; 1/2), B(4; 1/4), C(6; 1/2) \text{ y } D(4; 3/4)$$

La gráfica de la región Ω se muestra en la fig. 4.11. Finalmente, el área de la región Ω es

$$\begin{aligned}
 A(\Omega) &= A(\Omega_1) + A(\Omega_2) = \int_2^4 \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right] dx + \int_4^6 \left[\frac{3}{x} - \left(1 - \frac{3}{x}\right) \right] dx \\
 &= (2 - \ln 4) + \left(6 \ln \frac{3}{2} - 2 \right) = \ln \frac{729}{256} u^2
 \end{aligned}$$

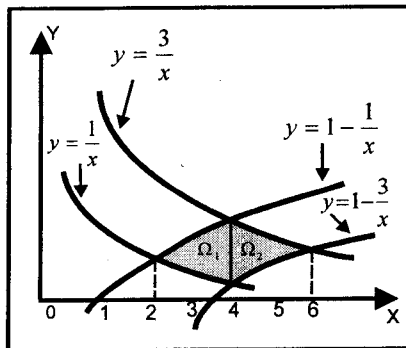


Fig. 4.11

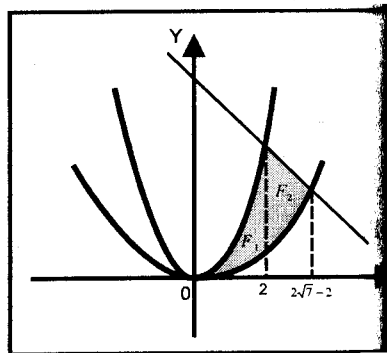


Fig. 4.12

Ejemplo 9. Halla el área de la región F , ubicada en el primer cuadrante y que está limitada por las gráficas de $y = x^2$, $x^2 = 4y$, $x + y = 6$.

Solución

La región F se muestra en la Fig. 4.12. Los puntos de intersección de las curvas en el primer cuadrante se hallan resolviendo simultáneamente los pares de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 6 - x \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 6 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (para el primer cuadrante)}$$

$$\begin{cases} y = x^2/4 \\ y = 6 - x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = 6 - x \Rightarrow x = 2\sqrt{7} - 2 \text{ (para el primer cuadrante)}$$

Luego, el área de la región F es

$$\begin{aligned} A(F) &= A(F_1) + A(F_2) = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx + \int_2^{2\sqrt{7}-2} \left(6 - x - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= 2 + \frac{1}{3}(28\sqrt{7} - 68) = \frac{1}{3}(28\sqrt{7} - 62)u^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 10. La región F , limitada por la curva $y = 10x - 5x^2$ y el eje x , es dividida en dos partes iguales por una recta que pasa por el origen. Halle la ecuación de dicha recta.

Solución

La región F se muestra en la Fig. 4.13. La pendiente de la recta L que pasa por el origen y por el punto $(a; 10a - 5a^2)$ es

$$m = \frac{10a - 5a^2}{a} = 10 - 5a.$$

Así, la ecuación de la recta L es

$$y = (10 - 5a)x.$$

Por otro lado, el área de la región F es

$$A(F) = \int_0^2 (10x - 5x^2) dx = \frac{20}{3}u^2$$

Ahora, como $F = F_1 \cup F_2$, con $A(F_1) = A(F_2)$, y $A(F_1) = \frac{A(F)}{2} = \frac{10}{3}$, entonces

$$A(F_1) = \int_0^a [(10x - 5x^2) - (10 - 5a)x] dx = \frac{5}{6}a^3 = \frac{10}{3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{4}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta L es $y = (10 - 5\sqrt[3]{4})x$.

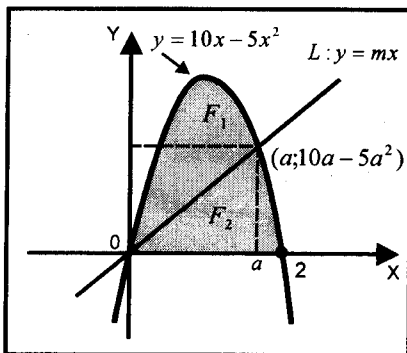


Fig. 4.13

Ejemplo 11. Una parábola de eje vertical corta a la curva $y = x^3 + 2$ en los puntos $(-1; 1)$ y $(1; 3)$. Si se sabe que las curvas mencionadas encierran una región de área $2u^2$, halle la ecuación de la parábola.

Solución

Este problema tiene dos soluciones.

Primer caso: Cuando la parábola está por debajo de la curva $y = x^3 + 2$.

Segundo caso: Cuando la parábola está por encima de la curva $y = x^3 + 2$.

Primer caso: Sea F_1 (Fig. 4.14) la región limitada por la parábola buscada y la parábola semicúbica $y = x^3 + 2$.

Considerando que la ecuación general de una parábola de eje vertical es

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

y que los puntos $(-1; 1)$ y $(1; 3)$ pertenecen a dicha parábola, se tiene

$$1 = A - B + C \quad \dots (\alpha)$$

$$3 = A + B + C \quad \dots (\beta)$$

$$\text{Como } A(F_1) = \int_{-1}^1 (x^3 + 2 - Ax^2 - Bx - C) dx = 2 \Rightarrow A + 3C = 3 \quad \dots (\gamma)$$

Resolviendo (α) , (β) y (γ) se obtiene

$$B = 1, \quad A = 3/2, \quad C = 1/2$$

Luego, la ecuación de la parábola es $2y = 3x^2 + 2x + 1$.

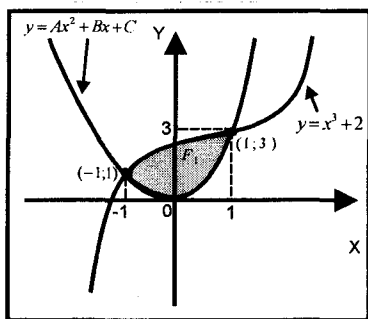


Fig. 4.14

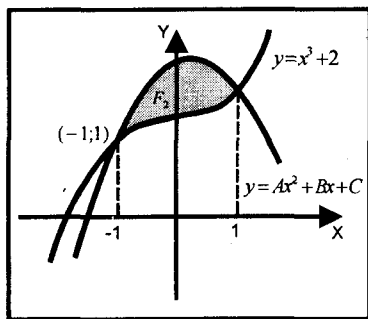


Fig. 4.15

Segundo caso: Sea F_2 (Fig. 4.15) la región limitada por la parábola buscada y la parábola semicúbica $y = x^3 + 2$.

$$\text{Como } A(F_2) = \int_{-1}^1 (Ax^2 + Bx + C - x^3 - 2) dx = 2 \Rightarrow A + 3C = 9 \quad \dots (\lambda)$$

Resolviendo (α) , (β) y (λ) se obtiene que la ecuación de la parábola es $2y = 7 + 2x - 3x^2$.

Ejemplo 12. Calcule, si existe, el área de la región infinita comprendida entre la curva $(2a - x)y^2 = x^3$, ($a > 0$) y su asíntota vertical.

Solución

La asíntota vertical de la curva es $x = 2a$. En la fig. 4.16 se muestra la gráfica de la región infinita Ω . Luego,

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= 2 \int_0^{2a} \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}} dx = 2 \lim_{t \rightarrow 2a^-} \int_0^t \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} dx \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 2a^-} \int_0^t \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} dx \end{aligned}$$

Haciendo $u = x - a$ se obtiene

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= 2 \lim_{t \rightarrow 2a^-} a^2 \left[\frac{3}{2} \arcsen\left(\frac{x-a}{a}\right) - \frac{1}{2a^2} (x+3a)\sqrt{x(2a-x)} \right]_0^t \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 2a^-} a^2 \left[\frac{3}{2} \arcsen\left(\frac{t-a}{a}\right) - \frac{1}{2a^2} (t+3a)\sqrt{t(2a-t)} + \frac{3\pi}{4} \right] \\ &= 2a^2 \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) = (3\pi a^2)u^2 \end{aligned}$$

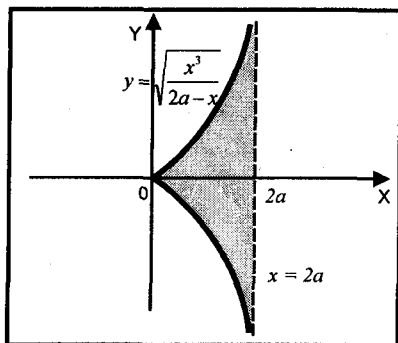


Fig. 4.16

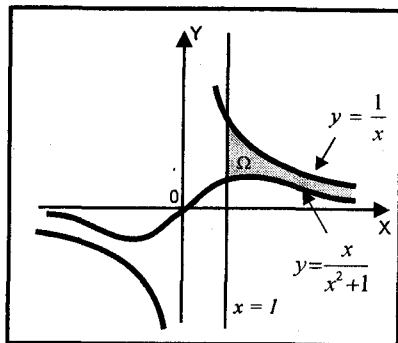


Fig. 4.17

Ejemplo 13. Dada la región infinita Ω limitada superiormente por $xy = 1$, inferiormente por $yx^2 + y - x = 0$ y a la izquierda por $x = 1$; calcule su área, si existe.

Solución

La región Ω se muestra en la figura 4.17 y su área requerida es

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2+1} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\ln \frac{t^2}{t^2+1} - \ln \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \ln(2) u^2 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1) Sombree la región Ω limitada por las curvas dadas y calcule su área.

1. $y = \cos x$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$. R. $\frac{3}{2}u^2$
2. $y = x^2 + 2x - 3$, $x = -2$, $x = 0$, $y = 0$. R. $\frac{22}{3}u^2$
3. $y = 9 - x^2$, $y = x^2 + 1$. R. $\frac{64}{3}u^2$
4. $y = \frac{x^2 - x}{1 + x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$. R. $\left(1 + \frac{\pi}{4} - \arctan 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}\right)u^2$
5. $y = 3x - x^2$, $y = x^2 - x$. R. $\frac{8}{3}u^2$
6. $x = 0$, $y = \tan x$, $y = \frac{2}{3} \cos x$. R. $\left(\frac{1}{3} - \ln \frac{2}{\sqrt{3}}\right)u^2$
7. $y = x^3 + x$, $x = 0$, $y = 2$, $y = 0$. R. $\frac{5}{4}u^2$
8. $y = \ln(x^2)$, $y = \ln 4$, $x = e$. R. $(4 - e \ln 4)u^2$
9. $x = e^y$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \ln 4$. R. $3u^2$
10. $y = \arctan x$, $y = \arccos \frac{3x}{2}$, $y = 0$. R. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}\right)u^2$
11. $y = \arcsen x$, $y = \arccos x$, $x = 1$. R. $\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right)u^2$
12. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$, $y = 2x^2 - 4x + 2$. R. $\frac{37}{12}u^2$
13. $y = 4 - \ln(x + 1)$, $y = \ln(x + 1)$, $x = 0$. R. $2(e^2 - 3)u^2$
14. Ω es la región encerrada por la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$. R. πab
15. Ω es la región de mayor área encerrada por las curvas $x^2 - 2y^3 = 0$,
 $x^2 - 8y = 0$, $y = 3$. R. $\left(\frac{16}{5} + 5\sqrt{2}\right)u^2$
16. Ω es la región de menor área limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 20$,
 $y^2 = 2x^3$. R. $\left(20 \arcsen \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{8}{5}\right)u^2$

17. Ω es la región de mayor área encerrada por las gráficas de $5x^2 - 4y = 0$ y la elipse cuyos focos son los puntos $(0, \pm 6)$ y cuya longitud de su eje menor es 6.

$$R. \left(9\sqrt{5}\pi - 9\sqrt{5} \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) u^2$$
18. $y^2 - x = 0$, $y - x^3 = 0$, $x + y - 2 = 0$.
19. $y = \begin{cases} \frac{4x - x^2}{4}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$, $y = \begin{cases} \frac{x^2 + 8x - 4\Omega}{16}, & x > -4 \\ -3x - 16, & x \leq -4 \end{cases}$.

$$R. 17u^2$$
20. $y(x^2 + 4) = 4(2 - x)$, $y = 0$, $x = 0$.

$$R. \left(\frac{\pi}{2} - \ln 4 \right) u^2$$
21. $y = x^3 + x - 4$, $y = x$, $y = 8 - x$.
22. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.

$$R. \frac{(e - 1)^2}{e} u^2$$
23. $y = 2x + 2$, $x = y^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$.

$$R. \left(15 + \frac{4}{3}\sqrt{2} \right) u^2$$
24. $y = |x - 2|$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

$$R. \frac{65}{6} u^2$$
25. $y = \sqrt{x^2 - 3}$, $y = |x - 1|$, $y = 0$.

$$R. \left(\frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \right) u^2$$
26. $y = |\sen x|$ con $x \in [0; 2\pi]$, $y + x = 0$, $x - 2\pi = 0$.

$$R. (4 + 2\pi^2) u^2$$
27. $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 16}$, $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$.
28. $y = \arcsen x$, $y = \arccos x$, $x = 0$.

$$R. (2 - \sqrt{2}) u^2$$
29. $y = \arcsen x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

$$R. (\sqrt{2} - 1) u^2$$
30. $y = x^3 + 3x^2 + 2$, $y = x^3 + 6x^2 - 25$.

$$R. 108 u^2$$
31. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, $y = 4x + 12$.

$$R. 64 u^2$$
32. $y = x^2$, $2y = x^2$, $y = 2x$.

$$R. 4 u^2$$
33. $y + x = 0$, $y = \int_0^x f(t) dt$, donde $f(t) = \begin{cases} 3t^2, & t < 2 \\ -2t - 1, & t \geq 2 \end{cases}$.

$$R. \left(\frac{23\sqrt{14} - 58}{3} \right) u^2$$

$$34. y = \tan^2 x, y = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = 0.$$

$$R. \left(\frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} \right) u^2$$

$$35. x^2 y = 2, x + y = 4, x = 1, x = 2.$$

$$R. (9/4) u^2$$

$$36. y = x^4, y = 8x.$$

$$R. (79/5) u^2$$

$$37. y = x^3 - x, y = \sin(\pi x).$$

$$R. \left(\frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} \right) u^2$$

$$38. x = 4y - y^2, x + 2y = 5.$$

$$R. (32/3) u^2$$

$$39. y = \sec^2 x, y = \tan^2 x, x = 0.$$

$$R. \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) u^2$$

$$40. y = \frac{1}{1 + x^2}, 2y = x^2.$$

$$R. \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right) u^2$$

$$41. x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

$$R. (3\pi a^2/8) u^2$$

$$42. x^2 = 4ay, y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}.$$

$$R. \left(2a^2\pi - \frac{4a^2}{3} \right) u^2$$

$$43. y = |20x + x^2 - x^3|, y = 0.$$

$$R. (2321/12) u^2$$

$$44. x = y^3 - 2y^2 - 5y + 6, x = 2y^2 + 5y - y^3 - 6.$$

$$R. (253/6) u^2$$

$$45. y = \arcsen 2x, x = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$R. \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\pi \right) u^2$$

$$46. y = x e^{8-2x^2}, y = x.$$

$$R. u^2$$

$$47. y = \frac{8}{x^4 + 4}, y = 0, x = 0, x = 4.$$

$$48. y = x^3 e^{8-2x^2}, y = 4x.$$

$$R. \left(\frac{e^8 - 73}{4} \right) u^2$$

$$49. y = |x - 1|, y = x^2 - 2x, x = 0, x = 2.$$

$$R. (7/3) u^2$$

$$50. y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}, x = -1, x = 1.$$

$$R. 3\sqrt[3]{2} u^2$$

$$51. (x + y)^2 = 16x, 5x + y = 8.$$

$$R. 18 u^2$$

$$52. y = |x - 2| - |x - 6|, x - y = 4.$$

$$R. 8u^2$$

$$53. y = |x - 5| - |x + 3|, x + y - 2 = 0.$$

$$R. 34u^2$$

$$54. y = \sin x + |\cos x|, x = -\pi, x = \pi, y = 0.$$

$$R. 4$$

55. $y = \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. R. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)u^2$
56. $y = 60(x^5 - x^4 + x^3)$, $y = -2x$, $x^2 = 1$. R. $52u^2$
57. $y = x + \sin x$, $y = x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$. R. $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}u^2$
58. $8x = 2y^3 + y^2 - 2y$, $8x = y^3$, $y^2 + y - 2 = 0$. R. $\frac{37}{96}u^2$
59. $x + y - y^3 = 0$, $x - y + y^2 = 0$. R. $\frac{37}{12}u^2$
60. $y = c \sin\left(\frac{x}{a}\right) \ln\left(\sin\frac{x}{a}\right)$, $x = 0$, $x = a\pi$. R. $2ac(1 - \ln 2)u^2$
61. $y^3(x - 2)^2 = 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 10$. R. $9u^2$
62. $y(x^2 + 4) = 8$, $3x^2 - 4y - 8 = 0$. R. $2(\pi + 2)u^2$
63. Ω es un arco de la cicloide cuya ecuación paramétrica es
 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. R. $3\pi a^2$
 Sugerencia: $A(\Omega) = \int_0^{2\pi} y \, dx$.
64. Ω es la región limitada por el astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.
R. $\frac{3}{8}\pi u^2$
65. Ω es la figura comprendida entre la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$, el eje x y el diámetro de la hipérbola que pasa por $(5; 4)$. R. $9 \ln 3$
66. Ω es la región limitada por la gráfica de $f(x) = \frac{2|x|}{1+x^2}$, el eje x y las dos rectas verticales correspondientes a las abscisas de los puntos máximos absolutos. R. $(\ln 4)u^2$
67. Ω es la región limitada por la gráfica de $f(x) = 2x^4 - x^2$, el eje x y las dos rectas verticales que pasan por los puntos mínimos relativos. R. $(7/120)u^2$
68. Ω es la región encerrada por $y^2 = x^2 - x^4$. R. $(4/3)u^2$
69. Ω está limitada por un lazo de la curva $a^2 y^4 = x^4(a^2 - x^2)$.
R. $\frac{4a^2}{5}u^2$

70. Ω está encerrada por un lazo de la curva $16a^4y^2 = b^2x^2(a^2 - 2ax)$.

$$R. \frac{ab}{30}u^2$$

71. Ω está encerrada por el lazo de la curva $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

$$R. \left(\frac{\pi a^2}{8}\right)u^2$$

72. Ω está encerrada por la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

$$R. a^2u^2$$

73. Ω está acotada por $y(4 + x^2) = 5$ y el semicírculo superior de

$$x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

$$R. \left(2 - 5 \arctan \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right)u^2$$

74. Ω está encerrada por la elipse (de eje oblicuo) $(y - x + 3)^2 = 4 - x^2$.

$$R. 4\pi u^2$$

75. $y = 9 - x^2$, $y = \ln(x - 2)$, $y = 2$.

II. En cada uno de los siguientes ejercicios grafique la región ilimitada Ω y halle su área (si existe), si se sabe que Ω está comprendida entre las gráficas de:

1. $y = \operatorname{sech} x$ y su asíntota.

$$R. \frac{\pi}{2}u^2$$

2. $y = \frac{64}{x^2 + 16}$ y su asíntota.

$$R. 16\pi u^2$$

3. $(4 - x^2)y^2 = x^4$ y sus asíntotas verticales.

$$R. 2\pi u^2$$

4. $y = \arctan x$, $2y = \pi$, $x = 0$.

$$R. \text{ no existe}$$

5. $y = \operatorname{sech}^{-1}x$ y su asíntota vertical.

$$R. \frac{\pi}{4}u^2$$

6. $y = \frac{2|x|}{1 + x^4}$, $y = -\frac{4|x|}{1 + x^4}$. lil

$$R. 3\pi u^2$$

III. Determine m de manera que la región que está por encima de $y = mx$ y debajo de la parábola $y = 2x - x^2$ tenga área igual a $36u^2$. $R. m = -4$

IV. El área de la región comprendida entre la parábola $y = 12x - 6x^2$ y el eje x es dividido en dos partes iguales por una recta que pasa por el origen. Halle la ecuación de dicha recta.

$$R. y = 6(2 - \sqrt[3]{4})x$$

V. La hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 8$ divide en 3 regiones a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Halle el área de cada una de las regiones.

4.2 VOLUMEN DE UN SÓLIDO EN FUNCIÓN DE LAS ÁREAS DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES

Sea S un sólido limitado en el espacio. Bajo ciertas condiciones es posible hallar el volumen de este sólido. Por ejemplo, sea S_x una sección plana del sólido S obtenido al cortar el sólido con un plano perpendicular al eje x en el punto de abscisa x (Fig. 4.18) y supongamos que existe un intervalo $[a; b]$ tal que

$$S = \bigcup_{x \in [a; b]} S_x$$

Si $A(S_x)$ es la función área de la sección plana (llamada sección transversal de S) y es continua, $\forall x \in [a; b]$, entonces el volumen del sólido S está dado por

$$V(S) = \left[\int_a^b A(S_x) dx \right] u^3$$

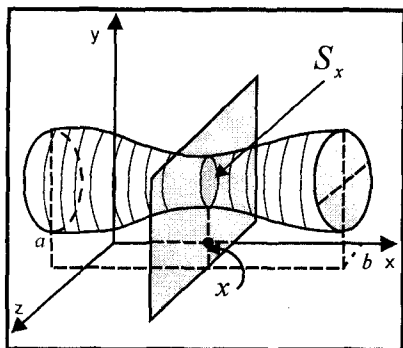


Fig. 4.18

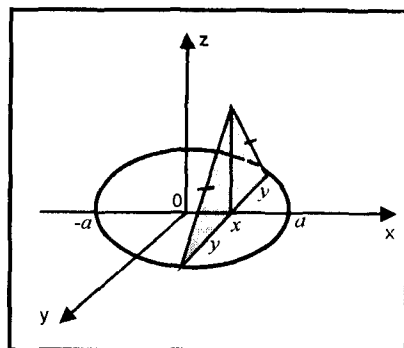


Fig. 4.19

Ejemplo 14. La base de un sólido es la región limitada por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Halle el volumen del sólido S si las secciones transversales perpendiculares al eje x son:

- Triángulos rectángulos isósceles, cada uno con hipotenusa sobre el plano xy .
- Cuadrados.
- Triángulos de altura 2.

Solución

- La gráfica de la sección transversal del sólido se muestra en la Fig. 4.19. El sólido es la unión de los S_x , $x \in [-a; a]$, donde S_x es un triángulo rectángulo isósceles de área

$$A(S_x) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(2y)h = \frac{1}{2}(2y)y = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Luego,

$$V = \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \left(\frac{4}{3}ab^2 \right) u^3$$

- b) Si las secciones transversales son cuadrados (Fig. 4.20), el sólido queda descrito como la unión de los S_x , $x \in [-a; a]$, tal que S_x es un cuadrado de lado $2y = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Luego, el área de la sección S_x es

$$A(S_x) = (2y)^2 = 4y^2 = 4\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \int_{-a}^a 4\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \left(\frac{16}{3}ab^2\right)u^3$$

- c) Si las secciones transversales son triángulos de altura 2 (Fig. 4.21), el sólido es la unión de los S_x , $x \in [-a; a]$, tal que S_x es el triángulo de altura 2 y base $2y = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Así, el área de la sección plana es

$$A(S_x) = \frac{1}{2}(2y)2 = 2y = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Por tanto, el volumen del sólido resulta

$$V = \int_{-a}^a \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx = (\pi ab)u^3$$

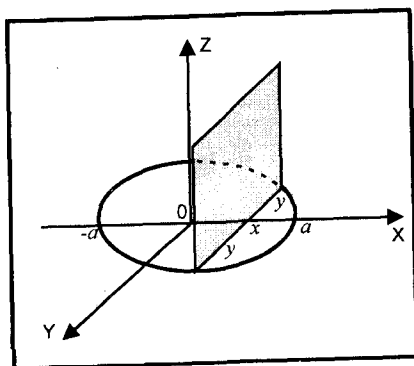


Fig. 4.20

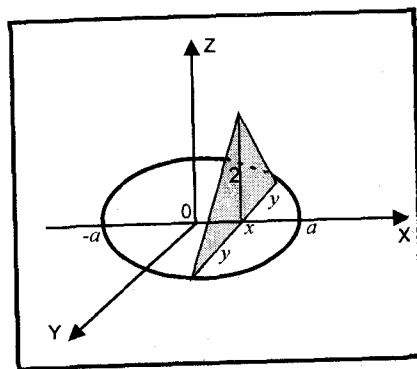


Fig. 4.21

Ejemplo 15. Una recta se mueve paralelamente al plano yz cortando a las dos elipses $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \wedge c^2x^2 + a^2z^2 = a^2c^2$, que se encuentran en los planos xy y xz respectivamente. Calcule el volumen del cuerpo así engendrado.

Solución

En este sólido, la sección S_x es un rombo (Fig. 4.22) cuyas diagonales son $2y \wedge 2z$. Luego, el área de la sección plana es

$$A(S_x) = 2zy, \quad x \in [-a; a]$$

Como $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ \wedge $z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_{-a}^a 2 \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2) dx$$

$$= \left(\frac{8}{3} abc\right) u^3$$

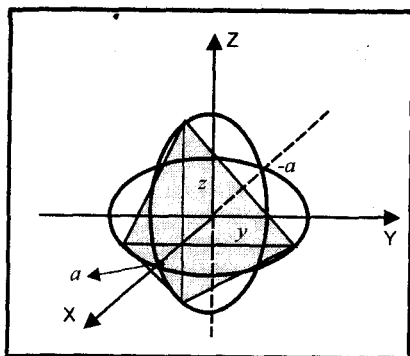


Fig. 4.22

EJERCICIOS

1. La base de un sólido es un círculo de radio r . Todas las secciones transversales del sólido, perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadrados. Determine el volumen del sólido.

R. $(16r^3/3) u^3$

2. Un sólido tiene por base un círculo de radio 1 y sus intersecciones con planos perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos rectángulos isósceles cuyas hipotenusas son las respectivas cuerdas de los círculos. Determine el volumen del sólido.

R. $(4/3) u^3$

3. Halle el volumen del sólido S que es la parte común a dos cilindros circulares rectos de radio r , suponiendo que sus ejes se cortan perpendicularmente.

R. $(16r^3/3) u^3$

4. La base de un sólido es una elipse cuyos ejes miden 20 y 10 unidades. La intersección de este sólido con un plano perpendicular al eje mayor de la elipse es un cuadrado. Calcule el volumen del sólido.

R. $(4000/3) u^3$

5. Halle el volumen de un sólido S cuya base es un círculo de radio 3 y cuyas secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo son triángulos equiláteros.

R. $36\sqrt{3} u^3$

6. La base de un sólido es la región entre las parábolas $x = y^2$ y $x = 3 - 2y^2$. Halle el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados.

R. $6 u^3$

7. La base de un sólido es la región entre las parábolas $y = x^2 \wedge y = 3 - 2x^2$. Halle el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos rectángulos isósceles, cada uno de ellos con la hipotenusa sobre el plano xy .
R. $(3/2) u^3$
8. El punto de intersección de las diagonales de un cuadrado (de lado variable) se desplaza a lo largo del diámetro (fijo) de una circunferencia de radio 3. El plano del cuadrado permanece siempre perpendicular al plano de la circunferencia, mientras que dos vértices opuestos del cuadrado se desplazan por la circunferencia. Halle el volumen del cuerpo así engendrado.
R. $72u^3$
9. Un cilindro circular recto de radio r es cortado por un plano que pasa por un diámetro de la base bajo un ángulo α respecto al plano de la base. Halle el volumen de la parte separada.
R. $(2r^3 \tan \alpha / 3) u^3$
10. El triángulo cuyos vértices son $O(0; 0)$, $A(a; b)$ y $B(0; b)$ gira alrededor del eje y . Halle el volumen del cono obtenido.
R. $(\pi a^2 b / 3) u^3$
11. La base de un sólido es un círculo de radio 3. Todo plano perpendicular a un diámetro dado interseca al sólido en un cuadrado que tiene un lado en la base del sólido. Calcule el volumen del sólido.
R. $144 u^3$
12. La base de un sólido es la región limitada por $y = 1 - x^2$, $y = 1 - x^4$. Las secciones transversales del sólido determinadas por planos perpendiculares al eje x son cuadrados. Encuentre el volumen del sólido.
13. En un sólido las secciones transversales perpendiculares al eje y son círculos cuyos diámetros se extienden entre la curva $x = \sqrt{y}$ y la recta $x = y$. Calcule su volumen.
R. $(\pi / 120) u^3$
14. La base de un sólido es un círculo limitado por $x^2 + y^2 = 25$ y las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros. Calcule su volumen.
15. Un cilindro recto cuya base es una elipse está cortado por un plano inclinado que pasa por el eje menor de la elipse. Calcule el volumen del cuerpo engendrado, sabiendo que la longitud del eje menor de la elipse es 8 y la longitud del semieje mayor es 10.

4.3 VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Definición 1. Un sólido de revolución es un sólido obtenido al rotar una región plana alrededor de una recta fija contenida en el plano de la región. La recta fija se llama eje de revolución.

4.3.1 MÉTODO DEL DISCO CIRCULAR Y DEL ANILLO CIRCULAR

Sea $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea S el sólido de revolución obtenido por la rotación en torno al eje x de la región plana R limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, (Fig. 4.23). La sección transversal S_x (Fig. 4.24) obtenida de la intersección del sólido S con un plano perpendicular al eje x que pasa por $x \in [a; b]$ es un círculo de radio $|y| = |f(x)|$ (disco circular). El área de esta sección es

$$A(S_x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2, \quad x \in [a; b]$$

Luego, por el método de las secciones transversales, el volumen de S es

$$V = \left(\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \right) u^3$$

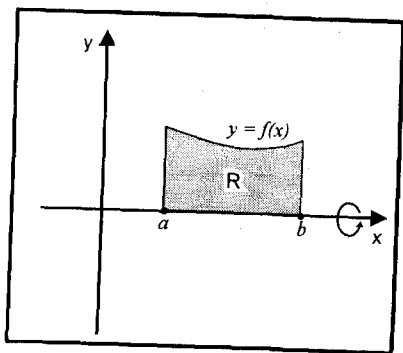


Fig. 4.23

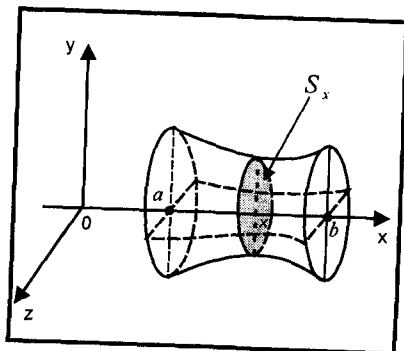


Fig. 4.24

Observación 2. Sea S el sólido de revolución obtenido por la rotación en torno al eje y de la región plana R limitada por la curva $x = g(y)$ (g continua en el intervalo $[c; d]$), el eje y y las rectas $y = c$ y $y = d$ (Fig. 4.25).

Entonces el volumen del sólido es

$$V = \left(\pi \int_c^d [g(y)]^2 dy \right) u^3$$

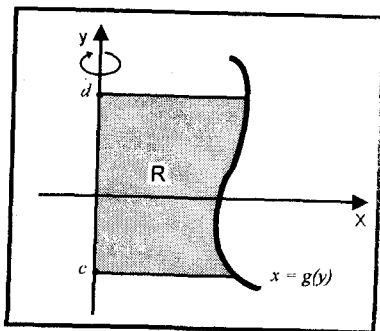


Fig. 4.25

Observación 3. Sean $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas cuyas gráficas se encuentran a un mismo lado del eje x , y además $|g(x)| \leq |f(x)|, \forall x \in [a; b]$. Sea S el sólido de revolución que se obtiene por la rotación en torno al eje x de la región Ω acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ (en la fig. 4.26, solamente se muestra el caso $0 < g(x) < f(x)$). Como la sección transversal S_x obtenida por la intersección de S con un plano perpendicular al eje x que pasa por $x \in [a; b]$ es un **anillo circular** (Fig. 4.27), entonces el área del anillo circular es

$$A(S_x) = \pi\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}, x \in [a; b]$$

Luego, el volumen del sólido de revolución S resulta

$$V = \left(\pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx \right) u^3$$

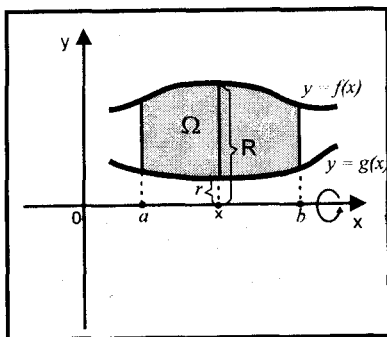


Fig. 4.26

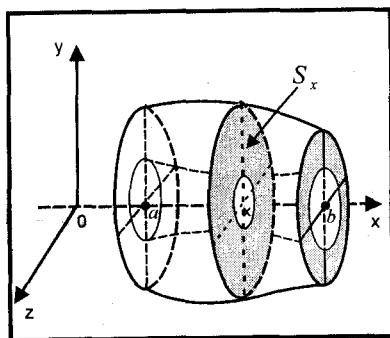


Fig. 4.27

Una regla práctica para recordar la fórmula del volumen de un sólido de revolución es

$$V = \left(\int_a^b \pi(R^2 - r^2) dx \right) u^3$$

donde R es el radio mayor del anillo circular y r es el radio menor (fig. 4.26). Si $r = 0$, la fórmula es la que se obtiene por el método del disco circular.

Observación 4. Sean $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas cuyas gráficas se encuentran en un mismo lado de la recta $y = c$ y $|g(x) - c| \leq |f(x) - c|, \forall x \in [a; b]$. Sea S el sólido de revolución que se obtiene al hacer rotar en torno a la recta $y = c$ la región Ω limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ (Fig. 4.28).

Entonces el volumen del sólido S es

$$V = \left(\pi \int_a^b \{|f(x) - c|^2 - |g(x) - c|^2\} dx \right) u^3$$

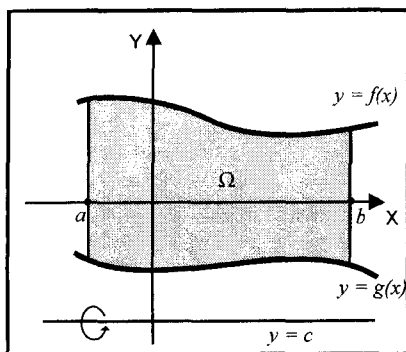


Fig. 4.28

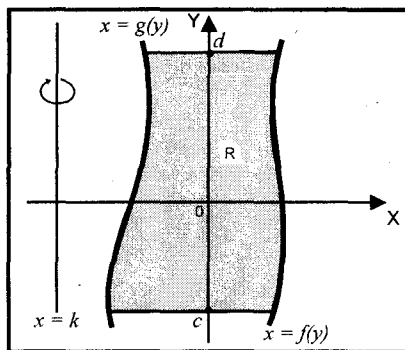


Fig. 4.29

Observación 5. Si la región Ω limitada por las gráficas de $x = f(y)$, $x = g(y)$ y las rectas horizontales $y = c$, $y = d$ gira alrededor de la recta vertical $x = k$ (Fig. 4.29), donde las gráficas de f , g están a un mismo lado del eje de rotación y $|g(y) - k| \leq |f(y) - k|$, $\forall y \in [c; d]$. Entonces el volumen del sólido de revolución obtenido es

$$V = \left(\pi \int_c^d \{[f(y) - k]^2 - [g(y) - k]^2\} dy \right) u^3$$

Ejemplo 16. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje x de la región limitada por las gráficas de $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Solución

La región se muestra en la figura 4.30. Aplicando el método del disco ($R = e^x$), se obtiene

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) u^3$$

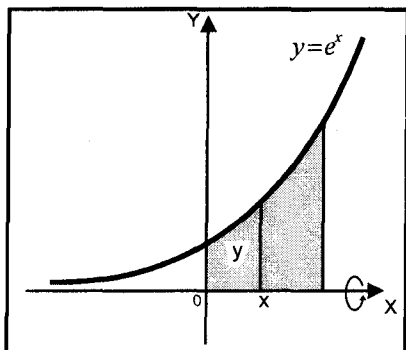


Fig. 4.30

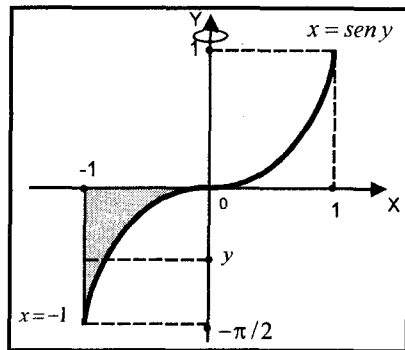


Fig. 4.31

Ejemplo 17. La región limitada por las gráficas de $y = \arcsen x$, $y = 0$ y $x = -1$ gira alrededor del eje y . Calcule el volumen del sólido engendrado.

Solución

Como el eje de rotación es el eje y , consideramos a y como variable independiente. La región se muestra en la Fig. 4.31.

Como $R = 1$ y $r = -\sen y$, entonces el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\pi/2}^0 [R^2 - r^2] dy = \pi \int_{-\pi/2}^0 (1 - \sen^2 y) dy \\ &= \pi \left[\frac{y}{2} + \frac{1}{4} \sen(2y) \right]_{-\pi/2}^0 = \frac{\pi^2}{4} u^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 18. La región limitada por las gráficas de $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ y $x = 2$ gira alrededor del eje x . Calcule el volumen del sólido.

Solución

Las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$ se cortan en los puntos $(0;0)$ y $(1;1)$. En la Fig. 4.32 se muestra la región entre ellas y la recta $x = 2$. En la primera región, $(0 \leq x \leq 1)$ una sección transversal es un anillo circular con radio menor $r = x^2$ y radio mayor $R = \sqrt{x}$. En la segunda región $(1 \leq x \leq 2)$, la sección transversal es un anillo circular con radio menor $r = \sqrt{x}$ y radio mayor $R = x^2$.

Por lo tanto, el volumen del sólido S es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx + \pi \int_1^2 [(x^2)^2 - (\sqrt{x})^2] dx \\ &= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx + \pi \int_1^2 (x^4 - x) dx = \frac{3\pi}{10} + \frac{47\pi}{10} = 5\pi u^3 \end{aligned}$$

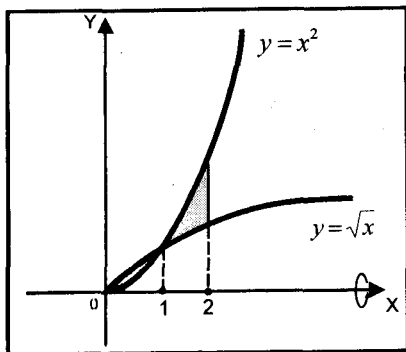


Fig. 4.32

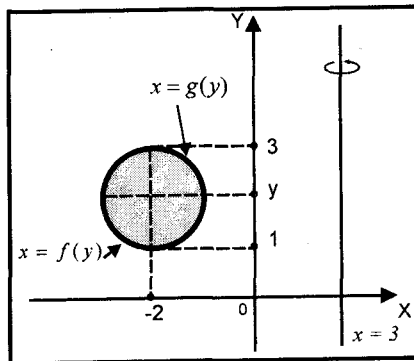


Fig. 4.33

Ejemplo 19. La región limitada por la circunferencia $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ gira alrededor de la recta $x = 3$. Calcule el volumen del sólido generado (**toro de revolución**).

Solución

La región se muestra en la fig. 4.33, donde

$$f(y) = -2 - \sqrt{1 - (y - 2)^2} \quad \wedge \quad g(y) = -2 + \sqrt{1 - (y - 2)^2}$$

Así, el radio mayor R y el radio menor r son, respectivamente,

$$R = 3 - f(y) = 5 + \sqrt{1 - (y - 2)^2} \quad \text{y} \quad r = 3 - g(y) = 5 - \sqrt{1 - (y - 2)^2}$$

Luego, el volumen del sólido de revolución es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 (R^2 - r^2) dy = \pi \int_1^3 20\sqrt{1 - (y - 2)^2} dy \\ &= 10\pi \left[(y - 2)\sqrt{1 - (y - 2)^2} + \arcsen(y - 2) \right]_1^3 = (10\pi^2)u^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 20. La región limitada por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ con $0 < b < a$ gira alrededor de su eje mayor. Calcule el volumen del sólido generado.

Solución

Como la elipse es simétrica respecto al eje mayor, podemos considerar que el sólido es generado por la rotación de la región sombreada en la fig. 4.34 alrededor del eje x . Así, el radio de giro del disco circular es

$$R = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Por consiguiente, el volumen del sólido de revolución es

$$V = \pi \int_{-a}^a R^2 dx = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \left(\frac{4}{3} ab^2 \pi \right) u^3$$

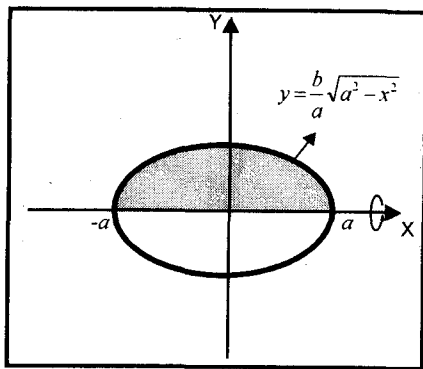


Fig. 4.34

Ejemplo 21. La región infinita comprendida entre la curva $x + xy^2 - y = 0$ y su asíntota vertical gira alrededor de su asíntota vertical. Calcule, si existe, el volumen del sólido.

Solución

Al despejar x de la ecuación, obtenemos $x = \frac{y}{1 + y^2}$ con lo cual la asíntota vertical de esta curva es $x = 0$ (eje y), pues $y \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0$.

Considerando que la curva (Fig. 4.35) es simétrica con respecto al origen y el radio de giro en el primer cuadrante es $R = x = \frac{y}{1+y^2}$, entonces el volumen del sólido es

$$V = 2\pi \int_0^{+\infty} R^2 dy = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^2} dy = 2\pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{y^2}{(1+y^2)^2} dy$$

Haciendo $y = \tan \theta$, la integral resulta

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan(y) - \frac{y}{2(1+y^2)} \right]_0^t \\ &= 2\pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan(t) - \frac{t}{2(1+t^2)} \right] \\ &= \frac{\pi^2}{2} u^3 \end{aligned}$$

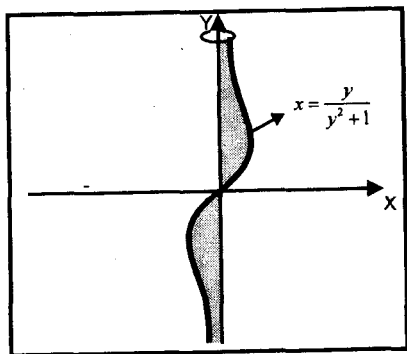


Fig. 4.35

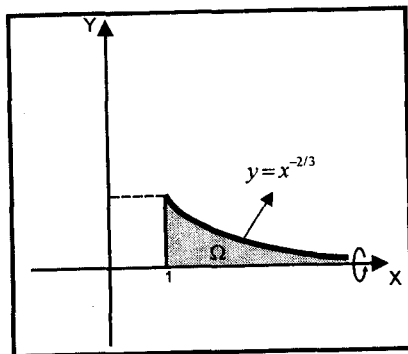


Fig. 4.36

Ejemplo 22. Determine el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje x la región infinita comprendida entre la recta $y = 0$ y la curva $y = \frac{1}{x^{2/3}}$, $x \geq 1$.

Solución

La región se muestra en la Fig. 4.36. Al aplicar el método del disco, se obtiene

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{2/3}} \right)^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} x^{-4/3} dx \\ &= \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x^{-4/3} dx = \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-3x^{-1/3} \right]_1^t = \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{t^{1/3}} + 3 \right) \\ &= 3\pi u^3 \end{aligned}$$

4.3.2 MÉTODO DE LA CORTEZA CILÍNDRICA

Sea $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a \geq 0$ una función continua y no negativa y S el sólido de revolución obtenido al hacer rotar en torno al eje y la región Ω limitada por las gráficas $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a \wedge x = b$ (Fig. 4.38).

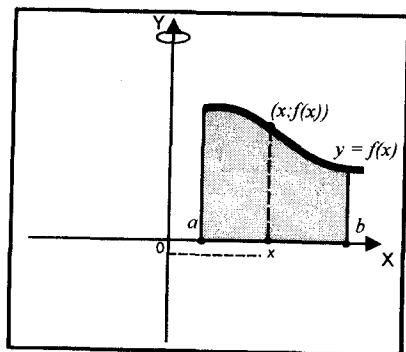


Fig. 4.38

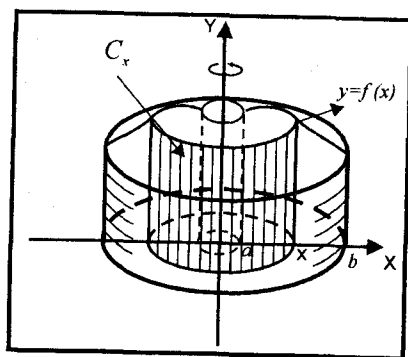


Fig. 4.39

El sólido S (Fig. 4.39) puede ser considerado como la unión de los cilindros C_x , $x \in [a; b]$, es decir,

$$S = \bigcup_{x \in [a; b]} C_x$$

Como el área (lateral) de cada cilindro circular recto C_x está dado por

$$A(C_x) = 2\pi x f(x); x \in [a; b]$$

se deduce que el volumen del sólido S es

$$V = \int_a^b A(C_x) dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Observación 6. Sean $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a; b]$ tales que $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a; b]$, y S el sólido de revolución obtenido al hacer rotar alrededor de la recta $x = c$, con $c \leq a$, la región Ω limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ (Fig. 4.40). Entonces el volumen del sólido S es

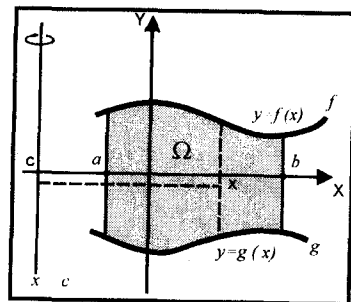


Fig. 4.40

$$V = \left(2\pi \int_a^b (x - c) [f(x) - g(x)] dx \right) u^3$$

Observación 7. Sean $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a; b]$ tales que $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, y S el sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor de la recta $x = c$, con $c \geq b$, la región Ω limitada por las gráficas de $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$, $y = g(x)$ (Fig. 4.41). El volumen del sólido S es

$$V = \left(2\pi \int_a^b (c - x)[f(x) - g(x)]dx \right) u^3$$

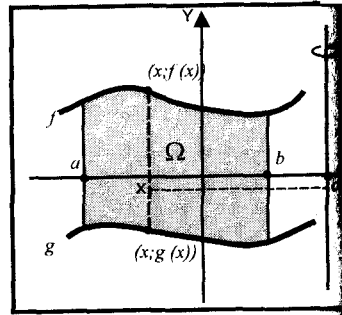


Fig. 4.41

Observación 8. Sea Ω la región limitada por las gráficas $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = a$ \wedge $y = b$ (Fig. 4.42), donde f y g son continuas en $[a; b]$ tales que $g(y) \leq f(y)$, $\forall y \in [a, b]$, y S el sólido de revolución que se obtiene al hacer rotar la región Ω alrededor de la recta $y = c$, con $c \leq a$. El volumen de S es

$$V = \left(2\pi \int_a^b (y - c)[f(y) - g(y)]dy \right) u^3$$

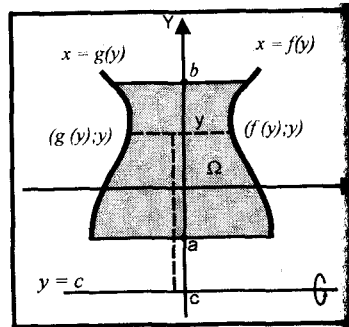


Fig. 4.42

Observación 9. Sea Ω la región limitada por las gráficas de $x = g(y)$, $x = f(y)$, $y = a$ \wedge $y = b$ (Fig. 4.43), donde f y g son continuas en $[a; b]$ tales que $g(y) \leq f(y)$, $\forall y \in [a; b]$, y S el sólido de revolución que se obtiene al hacer rotar la región Ω alrededor de la recta $y = c$, con $b \leq c$. El volumen del sólido S es

$$V = \left(2\pi \int_a^b (c - y)[f(y) - g(y)]dy \right) u^3$$

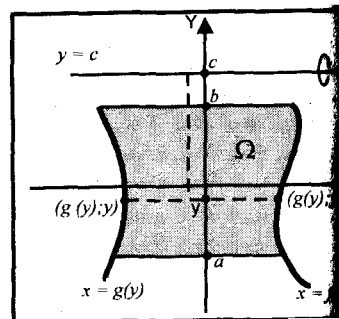


Fig. 4.43

Ejemplo 23. Encuentre el volumen del sólido engendrado al girar sobre el eje y la región limitada por la curva $y = (x - 2)^3$, el eje x y la recta $x = 3$.

Solución

La región se muestra en la figura 4.44. Aplicando el método de la corteza, tenemos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_2^3 x f(x) dx = 2\pi \int_2^3 x(x-2)^3 dx \\ &= 2\pi \int_2^3 (x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x) dx \\ &= \frac{14\pi}{10} u^3 \end{aligned}$$

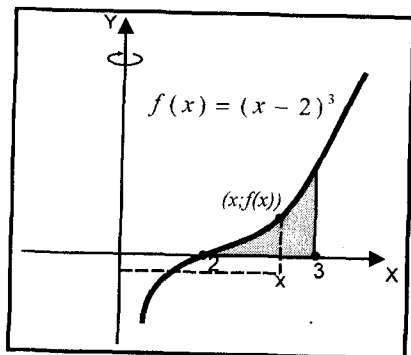


Fig. 4.44

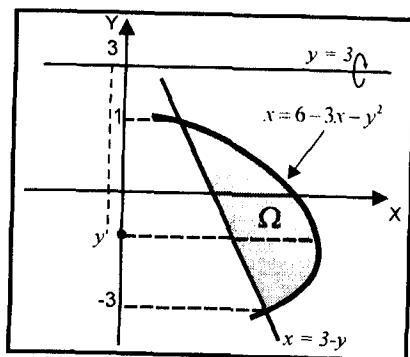


Fig. 4.45

Ejemplo 24. Halle el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las gráficas de $x + y^2 + 3y - 6 = 0$, $x + y - 3 = 0$ alrededor de la recta $y = 3$.

Solución

La región se muestra en la figura 4.45. Como el eje de revolución es horizontal, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-3}^1 (3 - y)[(6 - 3y - y^2) - (3 - y)] dy \\ &= 2\pi \int_{-3}^1 (y^3 - y^2 - 9y + 9) dy \\ &= \frac{256\pi}{3} u^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 25. Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor de la recta $x = 1$ la región limitada por las gráficas de

$$y = |x^2 - 2x - 3|, y + 1 = 0, x - 1 = 0, x - 4 = 0$$

Solución

La región se muestra en la figura 4.46. Al aplicar el método de la corteza cilíndrica, el volumen del sólido es

$$V = 2\pi \int_1^4 (x-1)[|x^2 - 2x - 3| + 1]dx$$

Usando la figura 4.46 y la definición de valor absoluto, se tiene

$$|x^2 - 2x - 3| = |(x-3)(x+1)| = \begin{cases} -(x^2 - 2x - 3), & 1 \leq x < 3 \\ x^2 - 2x - 3, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

De aquí resulta

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left\{ \int_1^3 (x-1)[(3+2x-x^2)+1]dx + \int_3^4 (x-1)[(x^2-2x-3)+1]dx \right\} \\ &= 2\pi \left\{ \int_1^3 (-4+2x+3x^2-x^3)dx + \int_3^4 (x^3-3x^2+2)dx \right\} \\ &= 2\pi \left(6 + \frac{35}{4} \right) = \frac{59}{2}\pi u^3 \end{aligned}$$

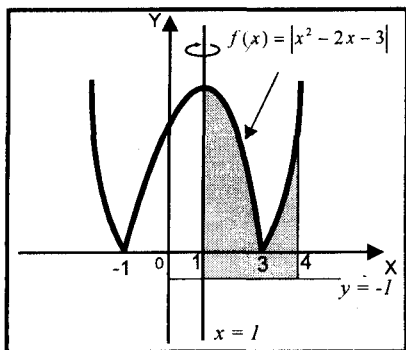


Fig. 4.46

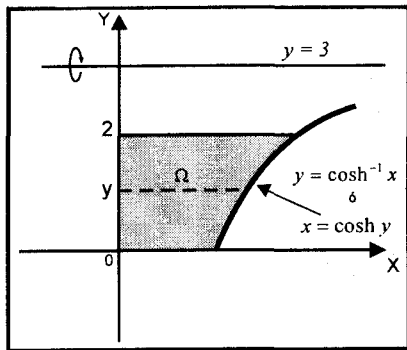


Fig. 4.47

Ejemplo 26. Calcule el volumen del sólido que se obtiene al rotar alrededor de la recta $y = 3$ la región $\Omega = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \cosh^{-1}(x), 0 \leq y \leq 2\}$.

Solución

La región Ω se muestra en la Fig. 4.47. Esta región está limitada por $x = \cosh y$, $x = 0$, $y = 0$ y $y = 2$. Como el eje de giro es la recta horizontal $y = 3$, entonces el volumen del sólido de revolución es

$$V = 2\pi \int_0^2 (3-y)(\cosh y)dy = 2\pi[\sinh(2) + \cosh(2) - 1]u^3$$

Ejemplo 27. La región infinita comprendida entre la gráfica de $xy^2 = (3a - x)$ ($a > 0$) y su asíntota vertical $x = 0$ gira alrededor del eje y . Calcule el volumen del sólido generado.

Solución

Con la ayuda de la región que se muestra en la figura 4.48, el volumen del sólido pedido es

$$\begin{aligned} V &= 2 \left(2\pi \int_0^{3a} x \sqrt{\frac{3a-x}{x}} dx \right) = 4\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{3a} x \sqrt{\frac{3a-x}{x}} dx \\ &= 4\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{3a} \sqrt{3ax - x^2} dx = 4\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{3a} x \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \left(x - \frac{3a}{2}\right)^2} dx \\ &= 4\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{3a}{2}\right) \sqrt{3ax - x^2} + \frac{9a^2}{4} \arcsen \left(\frac{2x - 3a}{3a} \right) \right]_t^{3a} \\ &= \frac{9a^2 \pi^2}{2} u^3 \end{aligned}$$

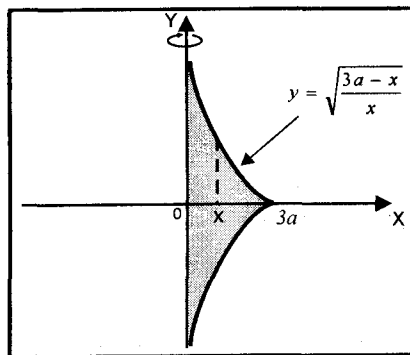


Fig. 4.48

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule el volumen del sólido generado por la rotación de la región Ω alrededor de la recta L , donde

1. L : eje x ; Ω : $y = x^2$, $y = 4x$. (*)

(*) Entiéndase Ω limitado por las gráficas de $y = x^2 \wedge y = 4x$.

2. L : $y = 0$; Ω : $y = (x - 1)^{-3}$, $x = -1$, $x = 0$, $y = 0$.

R. $\frac{31\pi}{160} u^3$

3. L : $y = 0$; Ω : $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, $y = 0$.

R. $\frac{\pi}{105} u^4$

4. $L: y = 0; \Omega: x^2 + (y - 3)^2 = 1$ R. $6\pi^2 u^3$
5. $L: \text{eje } x; \Omega: x^2 + y^2 - 2by + b^2 - c^2 = 0 \ (b > c > 0)$ R. $(2\pi^2 bc^2)u^3$
6. $L: \text{eje } x; \Omega: y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{2}{3}\pi$ R. $\ln\left(\frac{3}{2}\right)u^3$
7. $L: \text{eje } x; \Omega: y = e^x \sin(e^x), x = 0, x = \ln \frac{\pi}{4}$ R. $\left(\cos 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)u^3$
8. $L: y = 4; \Omega: y^2 = 4(2 - x), x = 0$ R. $\frac{128\sqrt{2}\pi}{3}u^3$
9. $L: \text{eje } x; \Omega: y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ R. $\frac{\pi^2}{4}u^3$
10. $L: x = 4; \Omega: x^2 + y^2 = 1$ R. $8\pi^2 u^3$
11. $L: x = -2; \Omega: y^2 = x, y = x^2$ R. $\frac{49\pi}{30}u^3$
12. $L: y = -1; \Omega: y = \arccos x, y = \arcsen x, x = 1$
13. $L: x = 0; \Omega: y = \sqrt{x^2 + 10}, x = 3, x = 4$ R. $\frac{2\pi}{3}(26\sqrt{26} - 19\sqrt{19})u^3$
14. $L: x = 0; \Omega: y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$
15. $L: y = 0; \Omega: y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right), x = 1, x = 4, y = 0$ R. $\pi\left(\ln 4 + \frac{3}{2}\right)u^3$
16. $L: y = 0; \Omega: y = 0, y = 2, x = 0, x = \sqrt{y^2 + 4}$ R. $16\pi\left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}\right)u^3$
17. $L: y = -1; \Omega: y = \arcsen x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}$
18. $L: y = -1; \Omega: y = \sqrt{x^2 - 3}, y = x - 1, y = 0$
19. $L: x = 0; \Omega: y = \frac{1}{\cos(x^2)}, x = 0, x = \sqrt{\frac{\pi}{4}}, y = 0$ R. πu^3
20. $L: x = 0; \Omega: y = x^3 + x, x = 1, x = 0$ R. $\frac{16\pi}{15}u^3$
21. $L: x = 1; \Omega: y = |x^2 - 2x - 3|, y + 1 = 0, x = 2, x = 4$
22. $L: y = 0; \Omega: y = x + 2, y^2 - 3y = 2x$ R. $\frac{45}{4}\pi u^3$
23. $L: \text{eje } y; \Omega: y = |\sin x|, 2x = \pi, 2x = 3\pi, y = 0$

$$24. L: y = 0; \Omega: y = \sqrt{4 - x^2}, y = 1, x = 0, x = \sqrt{3} \quad R. 2\pi\sqrt{3} u^3$$

$$25. L: y = 0; \Omega: x + y = 1, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad R. \frac{4}{15} \pi u^3$$

$$26. L: x = -1; \Omega: x = 0, y = 2, y = \sqrt{x}$$

$$27. L: y = 0; \Omega: y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}, y = 0, x = 2$$

$$28. L: x = 0; \Omega: y = 2 + \sin x, y = x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$$

$$29. L: x = 0; \Omega: y = x^5, x = -1, x = -2, y = -1 \quad R. \frac{233}{7} \pi u^3$$

$$30. L: x = 0; \Omega: a^2 y^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2, |x| = a \quad R. \frac{4\pi a^2 b(\sqrt{8} - 1)}{3} u^3$$

$$31. L: x = 4; \Omega: y = (x - 1)^2, y = x + 1$$

$$32. L: y = 0; \Omega: (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2) \quad R. 2\pi \left[\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right] u^3$$

$$33. L: x = 0; \Omega: y = 3x^2, y = 4 - 6x^2 \quad R. \frac{8\pi}{9} u^3$$

$$34. L: x = 0; \Omega: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4 \quad (\Omega: \text{corona}) \quad R. \frac{28}{3} \pi u^3$$

$$35. L: x = 0; \Omega: x = y^2, x = 8 - y^2 \quad R. \frac{256}{3} \pi u^3$$

$$36. L: y = -4; \Omega: 2x + 3y = 0, 4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$37. L: y = 0; \Omega: x^4 + y^4 = 4x^2 \quad R. \frac{16}{3} \pi u^3$$

$$38. L: x = -2; \Omega: |x|^3 - y + 1 = 0, x + 1 = 0, x - 2 = 0, y = 0$$

$$39. L: x = 5; \Omega: y(1 + x^2) = 2, y = x^2$$

$$40. L: y = 4; \Omega: y(1 + x^2) = 2, y = x^2$$

$$41. L: \text{eje } x; \Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad R. \frac{4}{3} \pi a b^2 u^3$$

$$42. L: \text{eje } y; \Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad R. \frac{4}{3} \pi a^2 b u^3$$

$$43. L: y = \frac{\pi}{2}; y = \arctan x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}, y = 0$$

$$44. L: x + 1 = 0; \Omega: y = \arctan x, x = 0, 4x = \pi, y = 0$$

45. $L: y = 2$; $\Omega: y = \ln x$, $y = 0$, $x = 0$, $y = 2$

46. $L: x = e^3$; $\Omega: y = \ln x$, $y = 0$, $x = 0$, $y = 2$

47. $L: x = -2$; $\Omega: y = 0$, $y = 4 - x^2$ R. $\frac{128}{3} \pi u^3$

48. $L: y = 2$; $\Omega: y = 0$, $x = 4$, $y = \sqrt{x}$ R. $\frac{40}{3} \pi u^3$

49. $L: y = -2$; $\Omega: y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ R. $\pi \left(\ln 4 + \frac{145}{6} \right) u^3$

50. $L: y = -2$; $\Omega: x = y \operatorname{sen} y$, $x = 0$, $y = \frac{\pi}{6}$

51. $L: \text{eje } x$; $\Omega: y = \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$, $y = 0$, $x = a$, $x = \frac{\pi}{4}$ con $0 < a < \frac{\pi}{4}$
R. $\pi \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos a + \ln(\sqrt{2} - 1) - \ln(\csc a - \cot a) \right] u^3$

52. $L: y = 0$; $\Omega: y = (x + 1)e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

53. $L: x = 0$; $\Omega: y = e^{x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ R. $\pi(e - 1)u^3$

54. $L: x = 7$; $\Omega: y = x e^{2x}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$

55. $L: y = -1$; $\Omega: y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ R. $\pi e u^3$

56. $L: \text{eje } x$; $\Omega: x^2 y^2 + 16 y^2 = 16$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$ R. $\pi^2 u^3$

57. $L: \text{eje } x$; $\Omega: \text{Triángulo equilátero con vértices } (0; 0), (a; 0), \left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)$
R. $\frac{\pi a^3}{4}$

58. $L: x = -3$; $\Omega: y = x^5 + 8$, $y = (x^3 - 2)^2$, $x = 0$

59. $L: \text{eje } y$; $\Omega: \text{es la región cerrada por el lazo de la curva } (y^2 - b^2)^2 = a^3 x$
R. $\frac{256}{315} \cdot \frac{\pi b^9}{a^6} u^3$

60. $L: \text{eje } x$; Ω es la región encerrada por el lazo de la curva
 $y^2 = \frac{ax(x - 3a)}{x - 4a}$, $a > 0$ R. $\frac{\pi a^3}{2} (15 - 16 \ln 2) u^3$

61. $L: x = 4$; $\Omega: x^2 y^2 + 16 y^2 = 16$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$
R. $32\pi [1 - \sqrt{2} + \ln(17\sqrt{2})] u^3$

62. $L: \text{eje } x$; Ω es la región, en el primer cuadrante, acotada por:
 $y^4 = x^2(2 - x)$, $y = 0$ R. $\frac{16}{15} \sqrt{2\pi} u^3$

63. L : eje x ; Ω : $y = e^{-x} \sqrt{\cos(e^{-x})}$, $x = \ln \frac{2}{\pi}$, $x = \ln \frac{3}{\pi}$
 $R. \frac{\pi}{6} [(3 - \sqrt{3})\pi - 3]u^3$
64. L : $x = 1$; Ω : $x^2 - 4 = y$, $y = -3x$
 $R. \frac{625}{6} \pi u^3$
65. L : eje y ; Ω es la región que se encuentra al lado derecho del eje y limitada por $x = 0$, $(4 + x^2)y^2 = 4 - x^2$
 $R. 4\pi(\pi - 2)u^3$
66. A la curva $\sqrt{xy} - 2x + 3y - 6 = 0$, en el punto $(3; 3)$ se trazan las rectas tangente y normal. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación alrededor de la recta $y = -3$, de la región limitada por la tangente, la normal normal trazada y el eje y .
 $R. \frac{10222}{49} \pi u^3$
67. A la parábola $y^2 = 12x$, en el punto de abscisa 6, se ha trazado una tangente. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x , la región limitada por la tangente trazada, el eje x y la parábola.
 $R. 72\pi u^3$
68. L : eje x ; Ω : $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$
 $R. \frac{\pi}{4} (e^2 - 1)u^3$
69. L : eje x , Ω : es la región limitada por $y = 0$ y un arco de la cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$
 $R. 5\pi^2 a^2 u^3$
70. L : eje y ; Ω es la región del problema 69
 $R. 6\pi^3 a^3 u^3$
71. L : $x = a\pi$; Ω es la región del problema 69
 $R. \frac{\pi a^3}{6} (9\pi^2 - 16)u^3$
72. L : $y = 2a$; Ω es la región del problema 69
 $R. 7\pi^2 a^3 u^3$
73. L : eje x ; Ω es la región limitada por $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.
74. Sea $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 1$. Para todo $a > 1$, el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $x = 1$, $x = a$ y el eje x , alrededor del eje x es: $V = \left(\frac{a^3}{3} + 2a^2 - \frac{7}{3}\right)u^3$. Determine $f(x)$.
 $R. f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{x^2 + 4x}$
75. Sea $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Para todo $a > 0$, el volumen del sólido generado por la rotación en torno al eje x de la región que se encuentra entre la gráfica de $y = f(x)$ y el eje x , desde $x = 0$ hasta $x = a$ con $a > 0$ es $V = (a^2 + a)u^3$. Determine $f(x)$.

En los siguientes ejercicios, Ω es una región infinita.

1. La curva $y^2(2a - x) = x^3$ gira alrededor de su asíntota vertical. Halle el volumen del sólido generado.

$$R. 2\pi^2 a^3 u^3$$

2. Sea Ω la región infinita comprendida entre las gráficas de $y = \frac{1}{x} \wedge y = \frac{x}{x^2 + 1}$, y que se encuentra a la derecha de la recta $x = 1$. El eje de rotación es el eje x . Calcule el volumen del sólido generado.

3. Ω es la región comprendida entre la curva $y = \frac{1}{x^2 + 2}$ y su asíntota y el eje de rotación es el eje x . Calcule el volumen del sólido generado.

$$R. \frac{\pi^2}{2} u^3$$

4. Ω es la región comprendida entre la curva $y = \int_0^x \frac{-4t}{(t^2 + 1)^3} dt$ ($x \in \mathbb{R}$) y su asíntota y el eje de rotación es su asíntota.

$$R. \frac{3}{16} \pi^2 u^3$$

5. Ω es la región comprendida entre la curva $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ y su asíntota, y el eje de revolución es su asíntota. Halle el volumen del sólido generado.

$$R. 4\pi^2 a^3 u^3$$

6. Ω es la región comprendida entre la curva $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ y su asíntota $x = 2a$ y el eje de revolución es $x = 2a$. Calcule el volumen del sólido engendrado.

$$R. 2\pi^2 a^3 u^3$$

7. Ω es la región comprendida entre la curva

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

y su asíntota, y el eje de revolución es el eje x . Calcule el volumen del sólido generado sabiendo que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

$$R. \frac{\pi^2}{2} u^3$$

4.4 LONGITUD DE ARCO

Sea $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada continua en $[a; b]$ y $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a; b]$. Esta partición define una poligonal constituida por los segmentos rectilíneos desde $Q_{i-1}(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$ hasta $Q_i(x_i; f(x_i))$, para $i = 1, 2, \dots, n$ (Fig. 4.49).

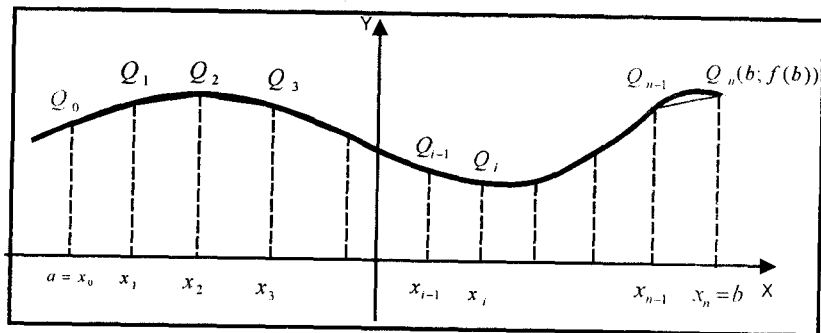


Fig. 4.49

Así, la longitud de la poligonal definida por la partición P es

$$L(P) = \sum_{i=1}^n |Q_{i-1}Q_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

El número $L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} L(P)$, si existe, se llama **longitud de arco** de la curva $y = f(x)$ desde el punto $(a; f(a))$ hasta el punto $(b; f(b))$. Demostraremos que en este caso el número L siempre existe.

Como f es derivable y continua en $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, por el teorema de Lagrange o del Valor Medio, $\exists t_i \in [x_{i-1}; x_i]$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i)(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Haciendo $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, tenemos

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta_i x)^2 + [f'(t_i)]^2 (\Delta_i x)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2} \Delta_i x$$

Por tanto, la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ es

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(t_i)]^2} \Delta_i x, \text{ es decir}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Observación 10. La longitud de la curva $x = g(y)$ comprendida entre las rectas $y = c \wedge y = d$, donde g es una función con derivada continua en $[c; d]$, es

$$L = \left(\int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy \right) u = \left(\int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} dy \right) u$$

Observación 11. Si la ecuación de la curva C viene dada en forma paramétrica mediante un par de funciones con derivadas continuas, esto es,

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta]$$

Entonces la longitud de la curva C desde $t = \alpha$ hasta $t = \beta$ es

$$L = \left(\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \right) u$$

Ejemplo 28. Halle la longitud de la curva

$$y = \sqrt{\sec^2 x + 1} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\sec^2 x + 1}}{\sec x} \right) \text{ desde } x = \frac{\pi}{4} \text{ hasta } x = \frac{\pi}{3}$$

Solución

Al aplicar las reglas de derivación y simplificando se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \tan x \sqrt{\sec^2 x + 1}$$

Por lo tanto, con la fórmula de la longitud de arco resulta

$$\begin{aligned} L &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} [1 + \tan^2 x (\sec^2 x + 1)]^{1/2} dx \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec^2 x dx = [\tan x]_{\pi/4}^{\pi/3} = (\sqrt{3} - 1)u \end{aligned}$$

Ejemplo 29 Encuentre la longitud de la curva cuya ecuación es $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{x^4}{16}$ desde $x = -2$ hasta $x = -1$.

Solución

Como $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{x^4}{16}$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{4} - \frac{1}{x^3}$. Luego, la longitud de arco es

$$\begin{aligned} L &= \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-2}^{-1} \sqrt{\left(\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3} \right)^2} dx = \int_{-2}^{-1} \left| \frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3} \right| dx \\ &= - \int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \frac{21}{16} u \end{aligned}$$

Ejemplo 30. Calcule la longitud total de la curva cuya ecuación es:

$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} \, dt, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Solución

Como $f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} \, dt$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, entonces $f'(x) = \sqrt{\cos x}$ es

continua en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto,

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right)} \, dx = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \left(\frac{x}{2}\right) \, dx = 4u$$

Ejemplo 31. Halle el perímetro del triángulo curvilíneo limitado por el eje de las abscisas y por las curvas cuyas ecuaciones son

$$y = \ln(\cos x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \wedge y = \ln(\sin x), \quad x \in (0; \pi)$$

Solución

Las gráficas de $f(x) = \ln(\cos x)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ y de $g(x) = \ln(\sin x)$, $x \in (0; \pi)$ se muestran en la figura 4.50. Las longitudes de los lados del triángulo curvilíneo son

$$L_1 = \frac{\pi}{2}u$$

$$L_2 = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} \, dx = \ln(\sqrt{2} + 1)u$$

$$L_3 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + [g'(x)]^2} \, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cot^2 x} \, dx = \ln(\sqrt{2} + 1)u$$

Por tanto, el perímetro del triángulo curvilíneo es $P = \left[\frac{\pi}{2} + 2 \ln(\sqrt{2} + 1)\right]u$

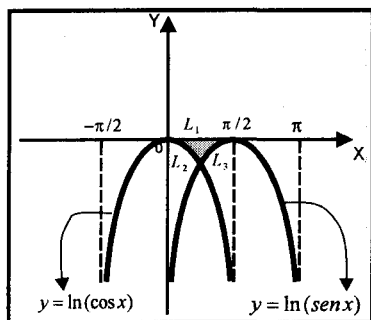


Fig. 4.50

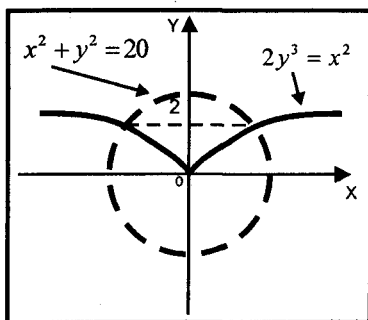


Fig. 4.51

Ejemplo 32. Calcule la longitud de la parábola semicúbica $2y^3 = x^2$, comprendida dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 20$.

Solución

La gráfica de la parábola semicúbica se muestra en la Fig. 4.51. Los puntos de intersección de las dos curvas son $(-4; 2)$ y $(4; 2)$. Ahora, derivando implícitamente la ecuación $2y^3 = x^2$ con respecto a y se tiene

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{x} \Rightarrow 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{9y^4}{x^2} = 1 + 9y \cdot \left(\frac{y^3}{x^2}\right) = 1 + \frac{9y}{2}$$

Como la gráfica de la parábola semicúbica es simétrica con respecto al eje y , entonces la longitud de arco comprendida dentro de la circunferencia es

$$L = 2 \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{2}y} dy = \frac{8}{27} (\sqrt{1000} - 1)u$$

Ejemplo 33. La posición de una partícula en el instante t es

$$x(t) = 1 - \cos t, \quad y(t) = t - \sin t$$

Halle el recorrido total entre $t = 0$ y $t = 1$

Solución

El recorrido total de la partícula es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^1 \sqrt{\sin^2 t + (1 - \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \int_0^1 \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= \int_0^1 \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| dt = \int_0^1 2 \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 4 \left(1 - \cos \frac{1}{2} \right) u \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. En cada uno de los ejercicios siguientes, determinar la longitud del arco de la curva descrita por

$$1. f(x) = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}, x \in \left[\frac{a}{6}; \frac{a}{2}\right] \quad R. (a \ln 3)u$$

$$2. f(x) = \frac{x^4 + 3}{6x}, \quad x \in [1; 3] \quad R. \left(\frac{14}{3}\right)u$$

$$3. f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}, \quad x \in [0; 1] \quad R. \frac{4}{3}u$$

$$4. f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1} - \operatorname{arcsec}(e^x) - 1, \quad x \in [0; 4] \quad R. (e^4 - 1)u$$

$$5. f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad x \in [2; 5] \quad R. \frac{393}{20}u$$

$$6. f(x) = \ln(-x), \quad x \in [-\sqrt{8}; -\sqrt{3}] \quad R. \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}\right)u$$

$$7. f(x) = \frac{1}{4} \arcsen x - \frac{x}{4} \sqrt{1 - x^2}, x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad R. \left(\frac{4\pi + \sqrt{3}}{16}\right)u$$

$$8. f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [3; 5] \quad R. 8u$$

$$9. x = \frac{3}{5}y^{5/3} - \frac{3}{4}y^{1/3}, y \in [0; 1] \quad R. \frac{27}{20}u$$

$$10. y = (9 - x^{2/3})^{3/2}, \quad x \in [1; 2] \quad R. \frac{9}{2}(\sqrt[3]{4} - 1)u$$

$$11. y = \frac{1}{2}x\sqrt{3 - x^2} + \frac{3}{2} \arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right), x \in [0; 1] \quad R. \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)u$$

$$12. y = 1 - \ln(\cos x), x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \quad R. \ln(\sqrt{2} + 1)u$$

$$13. y = \arcsen(e^{-x}), x \in [0; 1] \quad R. \ln(e + \sqrt{e^2 - 1})u$$

$$14. y = a \cosh \frac{x}{a}, \quad x \in [0; b] \quad R. a \sinh\left(\frac{b}{a}\right)u$$

$$15. x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} \ln y, y \in [1; e] \quad R. \left(\frac{e^2 + 1}{4}\right)u$$

$$16. f(x) = \ln(\coth \frac{x}{2}), x \in [a; b], a > 0 \quad R. \left[\ln\left(\frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1}\right) + a - b\right]u$$

$$17. f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}, x \in [1; 2]$$

$$R. \frac{59}{24} u$$

$$18. x = (a^{2/3} - y^{2/3})^{3/2}, y \in [-a; a]$$

$$R. 3a u$$

$$19. x = t - 1, y = \frac{1}{2}t^2, t \in [0; 1]$$

$$R. \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] u$$

$$20. x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, t \in [0; \pi]$$

$$R. \sqrt{2}(e^\pi - 1)u$$

$$21. x = \int_1^t \frac{\cos t}{t} dt, y = \int_1^t \frac{\sin t}{t} dt, \text{ desde el origen de coordenadas hasta el}$$

punto más próximo donde la tangente es vertical. $R. \ln \frac{\pi}{2} u$

$$22. x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), t \in [0; \alpha]$$

$$R. \frac{1}{2} a \alpha^2 u$$

II. En los siguientes ejercicios, halle la longitud de arco de las curvas que se indican.

1. La longitud total de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ $R. 2\pi a u$

2. La longitud total del astroide $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ $R. 6au$

3. La longitud del arco de la rama derecha de la tractriz

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right)$$

desde $y = a$ hasta $y = b$ con $0 < b < a$. $R. a \ln \left(\frac{a}{b} \right) u$

4. La longitud de la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ en el primer cuadrante.

$$R. \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} u$$

5. La longitud total de la curva cuya ecuación es

$$4(x^2 + y^2) - a^2 = 3a^{4/3}y^{2/3}$$

$$R. 6au$$

6. La longitud total de la curva $8y^2 = x^2 - x^4$

$$R. \pi\sqrt{2} u$$

7. La longitud de la curva $9y^2 = 3x^2 + x^3$ desde $x = -3$ hasta $x = 0$

$$R. 4\sqrt{3} u$$

8. La longitud de arco de la parábola semicúbica $5y^3 = x^2$ comprendida dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$ R. $\frac{134}{27}u$
9. Calcule el perímetro de la región de menor área limitada por las gráficas $y^2 = 2x^3 \wedge x^2 + y^2 = 20$
10. La longitud de la curva $y = \frac{x^2}{2} - \ln \sqrt{x}$, desde $x = 2$ hasta $x = 3$.
11. La longitud de la curva $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsen \sqrt{x}$. R. $2u$
12. La longitud total de la curva dada por $(y - \arcsen x)^2 = 1 - x^2$ R. $8u$
13. La longitud del arco de la curva $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$ comprendida dentro de la parábola $y^2 = \frac{x}{3}$ R. $\frac{8}{9} \left(\frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \right) u$
14. La longitud del arco de la curva dada por $x = (t^2 - 2)\sen t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sen t$, desde $t = 0$ hasta $t = \pi$ R. $\frac{\pi^3}{3}u$
15. La longitud del arco de la curva $y = \ln(1 - x^2)$ desde $x = 0$ hasta $x = 1/2$ R. $\left[-\frac{1}{2} + \ln 3 \right] u$

III. Los siguientes ejercicios tratan del movimiento de una partícula.

1. En el tiempo t , una partícula se encuentra en el punto

$$P(\cos t + t \sen t; \sen t - t \cos t)$$

Encuentre la distancia recorrida desde el instante $t = 1$ hasta $t = \pi$

2. En el instante t , la posición de una partícula es

$$x = 1 + \arctan t, y = 1 - \ln \sqrt{1 + t^2}$$

Halle el recorrido desde el instante $t = 0$ hasta $t = 1$ R. $\ln(1 + \sqrt{2})u$

4.5 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa, con derivada continua en $[a; b]$. Haciendo girar la gráfica de f desde $x = a$ hasta $x = b$, alrededor del eje x , se obtiene una superficie de revolución (Fig. 4.52). El área de esta superficie de revolución está dado por

$$A(S) = \left(2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \right) u^2$$

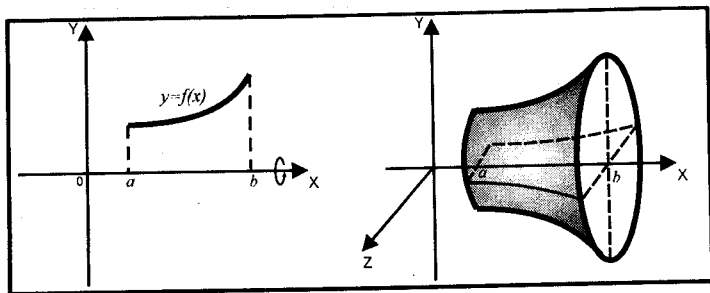


Fig. 4.52

Observación 12. Si la curva se describe por la ecuación paramétrica

$$C: x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha; \beta]$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ son funciones con derivadas continuas en $[\alpha; \beta]$, entonces el área de la superficie generada al hacer girar la curva C alrededor del eje x es

$$A(S) = \left(2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \right) u^2$$

Observación 13. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada continua en $[a; b]$ tal que su gráfica está a un mismo lado de la recta $y = c$. Haciendo girar la gráfica de f desde $x = a$ hasta $x = b$ alrededor de la recta $y = c$ se obtiene una superficie de revolución (Fig. 4.53) cuya área es

$$A(S) = \left(2\pi \int_a^b |f(x) - c| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \right) u^2$$

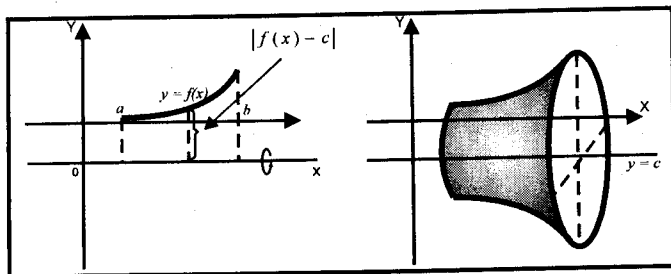


Fig. 4.53

Observación 14. Si la curva C se describe con la ecuación $x = g(y)$, $\forall y \in [a; b]$, donde g es una función con derivada continua en $[a; b]$ y S es la superficie de revolución que se obtiene al hacer rotar la curva C alrededor de la recta $x = c$, (Fig. 4.54), entonces el área de la superficie S es

$$A(S) = \left(2\pi \int_a^b |g(y) - c| \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy \right) u^2 \quad (*)$$

Si la ecuación de la curva C está dada en su forma paramétrica por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \forall t \in [\alpha; \beta]$$

donde las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$ tienen derivadas continuas en $[\alpha; \beta]$, entonces la fórmula (*) se transforma en

$$A(S) = \left(2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t) - c| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \right) u^2$$

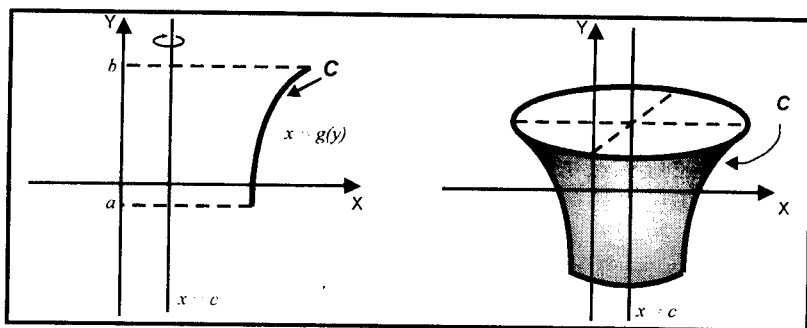


Fig. 4.54

Ejemplo 34. Halle el área de la superficie generada al hacer girar la gráfica de $f(x) = \sqrt{24 - 4x}$, $x \in [3; 6]$, alrededor del eje x .

Solución

Como $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{24 - 4x}}$, el área de la superficie resultante es

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_3^6 f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= 2\pi \int_3^6 \sqrt{24 - 4x} \sqrt{1 + \frac{4}{24 - 4x}} dx \\ &= 2\pi \int_3^6 \sqrt{28 - 4x} dx = \frac{56\pi}{3} u^2 \end{aligned}$$

La gráfica de $f(x) = \sqrt{24 - 4x}$ se muestra en la figura 4.55.

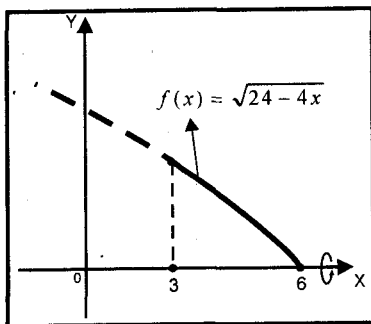


Fig. 4.55

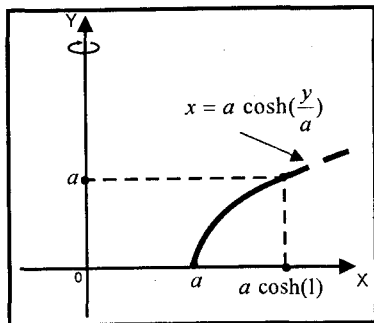


Fig. 4.56

Ejemplo 35. Halle el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje y y del arco de la curva $y = a \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ desde $x = a$ hasta $x = a \cosh(1)$

Solución

Considerando que la curva (Fig. 4.56) gira alrededor del eje y , el área de la superficie generada es

$$A(S) = 2\pi \int_0^a f(y) \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy$$

donde $x = f(y) = a \cosh\left(\frac{y}{a}\right)$ y $\frac{dx}{dy} = f'(y) = \sinh\left(\frac{y}{a}\right)$

Luego,

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_0^a a \cosh\left(\frac{y}{a}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{y}{a}\right)} dy \\ &= 2\pi \int_0^a a \cosh^2\left(\frac{y}{a}\right) dy = \frac{\pi a^2}{2} (2 + \sinh 2) u^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 36. Halle el área de la superficie cuando la curva $2x = y\sqrt{y^2 - 1} + \ln|y - \sqrt{y^2 - 1}|$, $y \in [2; 5]$, gira alrededor del eje x .

Solución

La ecuación paramétrica de la curva es

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} [t\sqrt{t^2 - 1} + \ln|t - \sqrt{t^2 - 1}|] \\ y(t) = t \end{cases}, \quad t \in [2; 5]$$

de donde $x'(t) = \sqrt{t^2 - 1}$ y $y'(t) = 1$

Por tanto, el área de la superficie es

$$A(S) = \int_2^5 y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = 2\pi \int_2^5 t \sqrt{(t^2 - 1) + 1} dt = 78\pi u^2$$

Ejemplo 37. Halle el área de la superficie generada por la revolución en torno al eje y y del arco de la curva $y = \frac{1}{4}[x^2 - 2\ln x]$, $x \in [1; 4]$.

Solución

La ecuación paramétrica de la curva es

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{4}[t^2 - 2\ln t] \end{cases}, \quad t \in [1; 4]$$

de donde $x'(t) = 1$, $y'(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$

Luego,

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_1^4 x(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \\ &= 2\pi \int_1^4 t \sqrt{1 + \frac{1}{4}(t - \frac{1}{t})^2} dt = 2\pi \int_1^4 \frac{t}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = 24\pi u^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 38. Calcule el área de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la curva $y = 2 - e^x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$, alrededor de la recta $y = 2$

Solución

La gráfica de la curva se muestra en la figura 4.57.

Se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -e^x$$

Luego, según la fórmula, el área de la superficie es

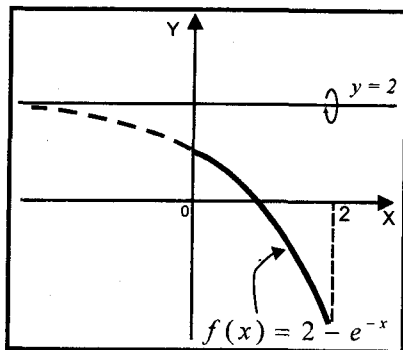


Fig. 4.57

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_0^2 (2 - f(x)) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^2 e^x \sqrt{1 + (e^x)^2} dx \\ &= \pi \left[e^2 \sqrt{1 + e^4} - \sqrt{2} + \ln \left(\frac{e^2 + \sqrt{1 + e^4}}{1 + \sqrt{2}} \right) \right] u^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 39. Halle el área del elipsoide de revolución que se obtiene al hacer

girar la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, alrededor de:

- a) su eje mayor b) su eje menor

Solución

- a) Cuando la elipse gira alrededor de su eje mayor, es suficiente considerar la

curva C descrita por $f(x) = \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$, $x \in [-5; 5]$ (Fig. 4.58).

Al emplear $f(x) = \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$ \wedge $f'(x) = -\frac{4x}{5\sqrt{25-x^2}}$, el área de la superficie resulta

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_{-5}^5 \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{16x^2}{25(25-x^2)}} dx \\ &= 2\pi \left(16 + \frac{100}{3} \arcsen \frac{3}{5} \right) u^2 \end{aligned}$$

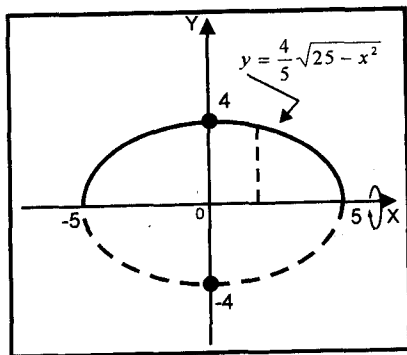


Fig. 4.58

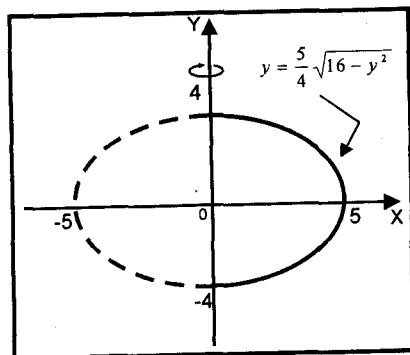


Fig. 4.59

- b) Cuando la elipse gira alrededor de su eje menor, es suficiente considerar la

curva $x = \frac{5}{4}\sqrt{16-y^2}$, $y \in [-4; 4]$ (Fig. 4.59).

Luego, el área del elipsoide generado es

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_{-4}^4 \frac{5}{4}\sqrt{16-y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{25y^2}{16(16-y^2)}} dy \\ &= \left(50\pi + \frac{80\pi}{3} \ln 4 \right) u^2 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

I. En cada uno de los siguientes ejercicios, halle el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x , las curvas dadas por

1. $f(x) = \frac{1}{9}x^3, x \in [0; 2]$ $R. (98\pi/81)u^2$

2. $f(x) = \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $R. 2\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]u^2$

3. Un lazo de la curva $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$ $R. (\pi a^2/4)u^2$

4. $6a^2xy = x^4 + 3a^4$ desde $x = a$ hasta $x = 2a$ $R. (47\pi a^2/16)u^2$

5. $f(x) = \frac{1}{3}x^3, x \in [0; 2]$ $R. \frac{\pi}{9}(17^{3/2} - 1)u^2$

6. $y^2 + 4x = 2 \ln y$ desde $y = 1$ hasta $y = 2$ $R. (10\pi/3)u^2$

7. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ $R. (12\pi a^2/5)u^2$

8. $y = e^{-x}, x \geq 0$ $R. \pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]u^2$

9. $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$ desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$
 $R. 2\pi\sqrt{2}(e^\pi - 2)/5 u^2$

10. $y = e^{-x}, x \geq 0$ $R. \pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]u^2$

11. $x = a \left(\cos t + \ln(\tan \frac{t}{2}) \right), y = a \sin t$ $R. 4\pi a^2 u^2$

12. $y = \tan x$ desde $(0; 0)$ hasta $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ $R. \pi \left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{5} + 1} \right) u^2$

13. El lazo de la curva $9ay^2 = x(3a - x)^2$ $R. 3\pi a^2 u^2$

14. $x^2 + (y - b)^2 = a^2, 0 < a < b$ (toro de revolución) $R. 4\pi^2 ab u^2$

15. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, x \in [1; 3]$ $R. (208\pi/9)u^2$

16. $y = 2x, x \in [0; 2]$ $R. 8\pi\sqrt{5}u^2$

17. $y^2 = 4ax$ desde $x = 0$ hasta $x = 3a$ $R. (56\pi a^2/3)u^2$

II. Halle el área de la superficie generada por la rotación en torno al eje y , de cada una de las siguientes curvas

1. $x = y^3, y \in [0; 3]$ $R. \frac{\pi}{27}[(730)^{3/2} - 1]u^2$

2. $6a^2xy = x^4 + 3a^4$ desde $x = a$ hasta $x = 3a$ $R. (20 + \ln 3)\pi a^2 u^2$

3. $2y = x\sqrt{x^2 - 1} + \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, $x \in [2; 5]$ R. $78\pi u^2$
 4. $x^2 + 4y^2 = 16$
 5. $y = x^2$, $x \in [1; 2]$
 6. $y = x^{4/3}$, $x \in [1; 8]$

III. Halle el área de la superficie de revolución formada cuando la curva indicada gira alrededor del eje dado.

1. $y = x^{3/2}$, $x \in [1; 8]$; alrededor de $y = 1$
 2. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, $x \in [1; 2]$; alrededor de $y = 1$
 3. $y = x^3$, $x \in [1; 2]$; alrededor de $y = -1$
 4. $y = \ln(x - 1)$, $x \in [2; e^2 + 1]$; alrededor de $x = 1$
 5. $y = 4 + e^x$, $x \in [0; 1]$; alrededor de $y = 4$
 6. $y = 2x$, $x \in [0; 2]$; alrededor de $y = -1$ R. $12\sqrt{5}\pi u^2$

4.6 MOMENTOS Y CENTROS DE MASA (ó CENTROS DE GRAVEDAD)

El **momento de masa** de una partícula respecto a una recta L se define como el producto de su masa y su distancia a la recta L . Así, si m es la masa de la partícula y d su distancia a la recta L Fig. 4.60, entonces el **momento de la partícula** respecto a la recta L está dado por

$$M_L = md$$

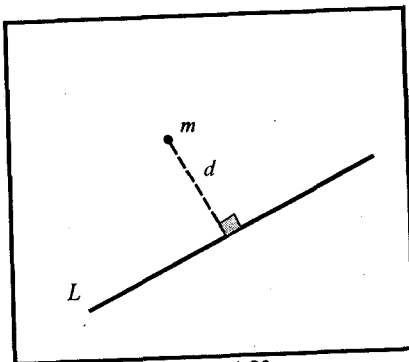


Fig. 4.60

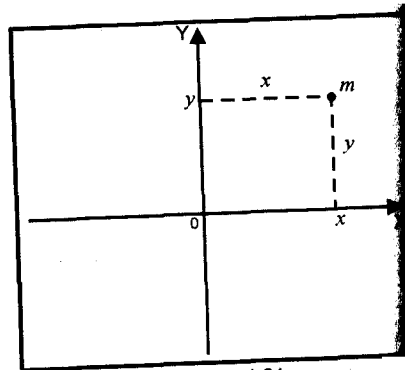


Fig. 4.61

Es conveniente considerar la partícula localizada en un plano de coordenadas y determinar el momento de la partícula respecto a un eje de coordenadas (o a una recta paralela a un eje de coordenadas). En este caso se usan las distancias dirigidas, así el momento será positivo o negativo o cero, según la ubicación de la partícula; por ejemplo si la partícula de masa m está en el punto $(x; y)$ Fig. 4.61, entonces sus momentos M_x y M_y respecto a los ejes x e y , respectivamente son

$$M_x = my, \quad M_y = mx$$

Si un sistema de n partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_n están situados en los puntos $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ respectivamente, los momentos M_x y M_y del sistema de n partículas se definen como

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (I)$$

El **centro de masa o centro de gravedad** de un sistema de partículas es un punto $P(\bar{x}; \bar{y})$ tal que, supuesto que la masa total m del sistema esta concentrada en el punto P , los momentos de P y del sistema coinciden.

Si el sistema de m partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_n ubicadas en los puntos $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ tienen su centro de gravedad en el punto $P(\bar{x}; \bar{y})$ y que la masa total del sistema es

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

entonces los momentos M_x y M_y de P están dados por

$$M_x = m\bar{y}, \quad M_y = m\bar{x}$$

Luego, de (I) se obtiene

$$m\bar{y} = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad \text{y} \quad m\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

De donde resulta

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}$$

En resumen, si M_x y M_y son los momentos de un sistema de partículas respecto a los ejes x e y respectivamente y $P(\bar{x}; \bar{y})$ es el centro de gravedad o centro de masa del sistema, entonces

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad (II)$$

donde m es la masa del sistema.

Ejemplo 40 Cuatro partículas están en los puntos $P_1(-1; -2)$, $P_2(1; 3)$, $P_3(0; 5)$, $P_4(2; 1)$ y sus masas son $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$ respectivamente, determine el centro de gravedad del sistema formado por estas cuatro partículas.

Solución

Tenemos $M_x = 2(-2) + 3(3) + 3(5) + 4(1) = 24$

$$M_y = 2(-1) + 3(1) + 3(0) + 4(2) = 9$$

$$m = 2 + 3 + 3 + 4 = 12$$

Luego,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{24}{12} = 2$$

Por tanto, el centro de gravedad está ubicado en el punto $P(3/4; 2)$

4.6.1 CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA REGIÓN PLANA ó LÁMINA

En primer lugar, es necesario tener en cuenta las siguientes consideraciones

- Una lámina es llamada **homogénea** si dos porciones de igual área tienen el mismo peso.
- La **densidad** ρ de una lámina es la masa de una unidad cuadrada de lámina. Si una lámina es homogénea, entonces su densidad (de área) ρ es constante y si A es el área de dicha lámina, entonces su masa es $m = \rho A$
- El centro de masa de una lámina homogénea, puede pensarse como el punto de balance de la lámina; si esta lámina tiene un centro geométrico, este será también el centro de masa ó centro de gravedad. Por ejemplo, el centro de masa de una lámina circular homogénea es el centro del círculo; el centro de masa de una lámina rectangular homogénea es el centro del rectángulo (intersección de las diagonales). Se define el momento de una lámina de masa m respecto a una recta, como el momento de una partícula de masa m situado en el centro de masa de la lámina.
- Si una lámina se corta en trozos, el momento de la lámina es la suma de los momentos de sus partes.

Ejemplo 41 Encuentre el centro de masa de una lámina homogénea de densidad ρ , que tiene la forma propuesta en la Fig. 4.62 (las medidas están en cm.)

Solución

La lámina está formada por 3 rectángulos y el área total de la lámina es igual a 93 cm^2 . Si colocamos los ejes de coordenadas tal como se indica en la figura, los centros de masa de los rectángulos R_1 , R_2 y R_3 son:

$$\left(\frac{13}{2}; \frac{21}{2}\right), (5; 6) \text{ y } \left(8; \frac{3}{2}\right)$$

respectivamente. Luego,

$$M_x = (21\rho)\left(\frac{21}{2}\right) + (60\rho)(6) + (12\rho)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1197}{2}\rho$$

$$M_y = (21\rho)\left(\frac{13}{2}\right) + (60\rho)(5) + (12\rho)(8) = \frac{969}{2}\rho$$

Por tanto, el centro de masa $(\bar{x}; \bar{y})$ de la lámina está dado por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{969}{2}\rho}{93\rho} = 5,209677419$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1197}{2}\rho}{93\rho} = 6,435483871$$

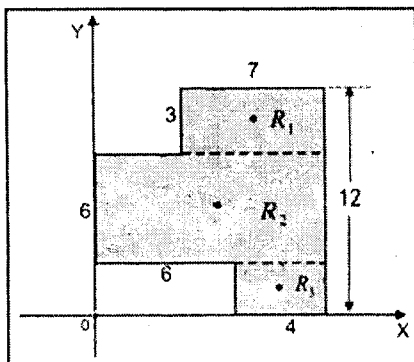


Fig. 4.62

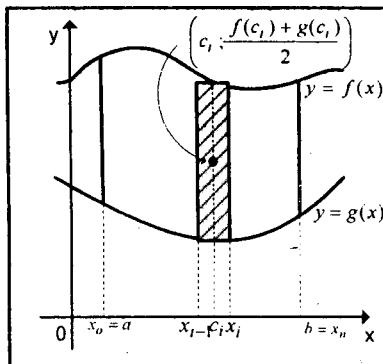


Fig. 4.63

Sea F una lámina homogénea cuya densidad es constante e igual a ρ . Supongamos que F es la región limitada por las gráficas de:

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad x = a, \quad x = b$$

donde f y g son funciones continuas en $[a; b]$ y $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a; b]$ (Fig. 4.63)

Sea $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una partición de $[a; b]$ y c_i es el punto medio de $[x_{i-1}; x_i]$, entonces se tiene que:

$$m_i = \rho[f(c_i) - g(c_i)]\Delta_i x, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\Delta_i x = x_i - x_{i-1})$$

es la masa del i -ésimo rectángulo sombreado en la figura 4.63

El centro de gravedad del i -ésimo rectángulo se encuentra en el punto

$$\left(c_i; \frac{f(c_i) + g(c_i)}{2} \right)$$

Sustituyendo cada rectángulo por un punto material y localizando la masa de cada rectángulo en su centro de gravedad se obtiene que los momentos de masa de los n rectángulos, determinados por la partición, respecto a los ejes x e y son:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i = \sum_{i=1}^n \rho [f(c_i) - g(c_i)] \left[\frac{f(c_i) + g(c_i)}{2} \right] \Delta_i x$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i = \sum_{i=1}^n \rho [f(c_i) - g(c_i)] c_i \Delta_i x$$

Luego, el centro de gravedad $(\bar{x}; \bar{y})$ estará aproximadamente en el centro de gravedad de los rectángulos determinados por la partición, es decir:

$$\bar{x} \approx \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \sum_{i=1}^n c_i [f(c_i) - g(c_i)] \Delta_i x}{\rho \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta_i x}$$

$$\bar{y} \approx \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^n \{ [f(c_i)]^2 - [g(c_i)]^2 \} \Delta_i x}{\rho \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta_i x}$$

Pasando al límite cuando $\|P\| \rightarrow 0$, se obtiene que las coordenadas $(\bar{x}; \bar{y})$ del centro de gravedad de la lámina F están dadas por

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x [f(x) - g(x)] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx} \quad \wedge \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx}$$

Como se observa, las coordenadas del centro de masa de la lámina homogénea no dependen de su densidad ρ , sólo depende de su forma. Usualmente el centro de masa de una lámina se denomina **centro de gravedad o centroide**, reservando el término centro de masa para un sólido.

Observación 15

- a) Si la región plana F es simétrica con respecto a la recta $x = x_0$, entonces $\bar{x} = x_0$
- b) Si la región plana F es simétrica con respecto a la recta $y = y_0$, entonces $\bar{y} = y_0$

Observación 16 Si la región plana F está limitada por las gráficas de:

$$x = f(y), \quad x = g(y), \quad y = c, \quad y = d$$

donde f y g son funciones continuas en $[c; d]$ y $f(y) \geq g(y)$, $\forall y \in [c; d]$
Fig. 4.64, las coordenadas del centro de gravedad $(\bar{x}; \bar{y})$ de la región F son

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2} \int_c^d \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\} dy}{\int_c^d [f(y) - g(y)] dy} \quad \wedge \quad \bar{y} = \frac{\int_c^d y[f(y) - g(y)] dy}{\int_c^d [f(y) - g(y)] dy}$$

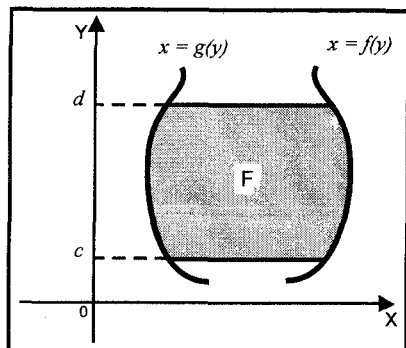


Fig. 4.64

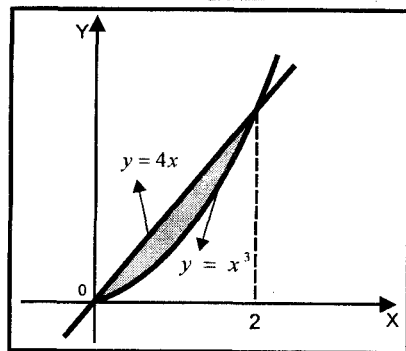


Fig. 4.65

Ejemplo 42 Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = x^3$, $y = 4x$ en el primer cuadrante.

Solución

El área y los momentos con respecto a los ejes x e y de la región son

$$A(R) = \int_0^2 (4x - x^3) dx = 4$$

$$M_y = \int_0^2 x[f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 x(4x - x^3) dx = \frac{64}{15}$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^2 \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (16x^2 - x^6) dx = \frac{256}{21}$$

$$\text{Luego, } \bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{64/15}{4}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256/21}{4}$$

Por tanto, el centroide es $P\left(\frac{16}{15}; \frac{64}{21}\right)$

Ejemplo 43 Halle el centro de gravedad de la región limitada por las curvas $x^2 - 8y = 0$, $x^2 + 16y = 24$

Solución

Como la región F (Fig. 4.66) es simétrica respecto al eje y , se sabe que $\bar{x} = 0$. El área de la región y el momento con respecto al eje x son

$$A = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{24 - x^2}{16} - \frac{x^2}{8} \right) dx = 4\sqrt{2}$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left[\left(\frac{24 - x^2}{16} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{8} \right)^2 \right] dx = \frac{16\sqrt{2}}{5}$$

Por tanto, el centro de gravedad es $\left(0; \frac{4}{5}\right)$ porque $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{4}{5} \wedge \bar{x} = 0$

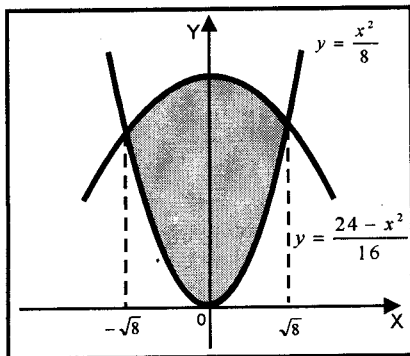


Fig. 4.66

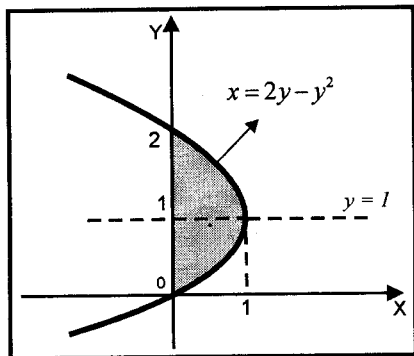


Fig. 4.67

Ejemplo 44 Encuentre el centroide de la región limitada por las curvas $x = 2y - y^2$, $x = 0$

Solución

Como el centro de masa está situado en el eje de simetría $y = 1$ (Fig. 4.67), entonces $\bar{y} = 1$.

Aplicando las fórmulas dadas en la observación 16 se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^2 (2y - y^2)^2 dy}{\int_0^2 (2y - y^2) dy} = \frac{8/15}{4/3} = \frac{2}{5}$$

Luego, el centroide es $P\left(\frac{2}{5}; 1\right)$

Ejemplo 45 Determine el centroide de la región plana limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 2$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$$

Solución

La región se ilustra en la Fig. 4.68. Dividiendo la región en dos partes se obtiene

$$A = \int_{-1}^0 (1-x+x^2)dx + \int_0^2 (x^2+1+x^2)dx = \frac{11}{6} + \frac{22}{3} = \frac{55}{6}$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 [(1-x)^2 - x^4]dx + \frac{1}{2} \int_0^2 [(x^2+1)^2 - x^4]dx = \frac{16}{15} + \frac{11}{3} = \frac{71}{15}$$

$$M_y = \int_{-1}^0 x(1-x+x^2)dx + \int_0^2 x(x^2+1+x^2)dx = -\frac{13}{12} + 10 = \frac{107}{12}$$

Luego, $\bar{x} = \frac{107/12}{55/6}$, $\bar{y} = \frac{71/15}{55/6}$, de donde el centroide es $P\left(\frac{107}{110}; \frac{142}{275}\right)$

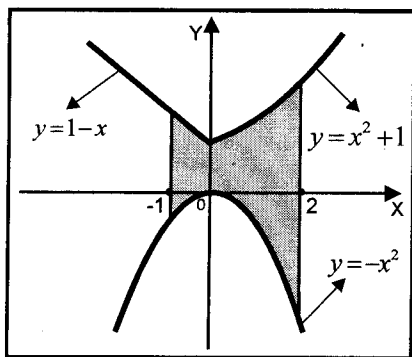


Fig. 4.68

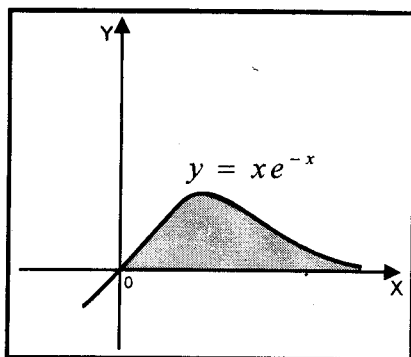


Fig. 4.69

Ejemplo 46 Halle el centro de gravedad de la región infinita, en el primer cuadrante, comprendido entre la curva $y = xe^{-x}$ y el eje x.

Solución

La región se ilustra en la Fig. 4.69. Luego, se tiene

$$A = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^t = 1$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x}]_0^t = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [x^2 e^{-2x} - 0] dx \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^t = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Luego, $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = 2$, $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{8}$

Por tanto, el centro de gravedad de la región es $P\left(2; \frac{1}{8}\right)$

Teorema (Teorema de Pappus para volúmenes)

Si un sólido S es obtenido al hacer rotar una región plana F (Fig. 4.70) en torno de una recta del mismo plano, que no sea secante a la región F , entonces el volumen de S es igual al área de la región F multiplicado por $2\pi r$, siendo r la distancia del centro de gravedad de la región F al eje de rotación, esto es,

$$V = 2\pi r \cdot A$$

donde A es el área de F .

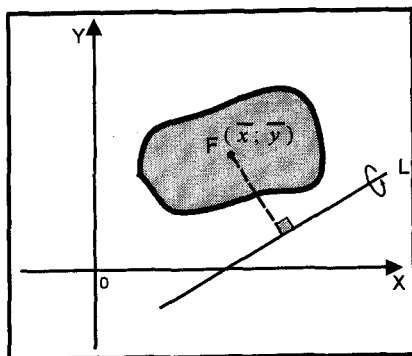


Fig. 4.70

Ejemplo 47 Calcule el volumen del sólido S generado por la rotación de la región F limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$ en torno a esta última.

Solución

Para determinar el centro de gravedad de la región F (Fig. 4.71) se tiene

$$A(F) = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \frac{9}{2}$$

$$M_y = \int_{-1}^2 x(x + 2 - x^2) dx = \frac{9}{4}$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [(x + 2)^2 - x^4] dx = \frac{36}{5}$$

Por tanto, el centroide $(\bar{x}; \bar{y})$ de la región tiene las coordenadas

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{8}{5}$$

Calculando la distancia r del punto $C\left(\frac{1}{2}; \frac{8}{5}\right)$ a la recta $y = x + 2$ se tiene

$$r = \frac{|\bar{x} - \bar{y} + 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{8}{5} + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{20}$$

Luego, por el teorema de Pappus, el volumen del sólido S es

$$V = 2\pi r \cdot A = 2\pi \left(\frac{9\sqrt{2}}{20}\right) \left(\frac{9}{2}\right) = \left(\frac{81\sqrt{2}\pi}{20}\right) u^3$$

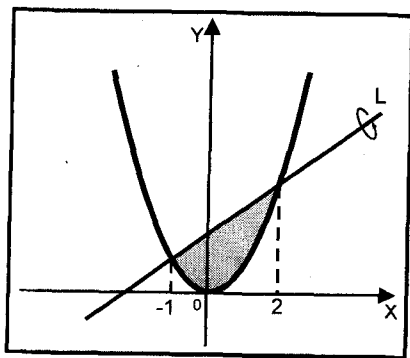


Fig. 4.71

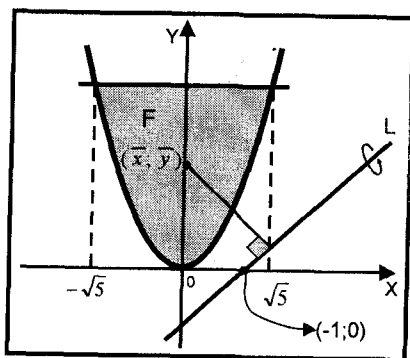


Fig. 4.72

Ejemplo 48 La región limitada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 5$ gira alrededor de una recta oblicua que pasa por el punto $A(1; 0)$. Halle la ecuación de dicha recta, si el volumen del sólido generado es igual a $40\sqrt{5}\pi u^3$

Solución

La gráfica de la región se muestra en la fig. 4.72. En primer lugar determinaremos el centroide de la región F . Como el centro de masa está situado en el eje de simetría (eje y), entonces $\bar{x} = 0$.

Por otro lado, la ordenada del centroide de la región es

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (25 - x^4) dx}{\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (5 - x^2) dx} = \frac{20\sqrt{5}}{20\sqrt{5}/3} = 3$$

Luego, el centro de gravedad es $(\bar{x}; \bar{y}) = (0; 3)$

Considerando que el área de la región F es $A = \frac{20\sqrt{5}}{3}$, se tiene

$$V = 40\sqrt{5}\pi = 2\pi r \left(\frac{20\sqrt{5}}{3} \right) \Rightarrow r = 3$$

Finalmente, si m es la pendiente de la recta L (eje de rotación) que pasa por el punto $A(1; 0)$, entonces su ecuación es

$$y - 0 = m(x - 1) \quad \text{ó} \quad mx - y - m = 0$$

Puesto que, $r = 3$ es la distancia del punto $(\bar{x}; \bar{y}) = (0; 3)$ a la recta L , entonces

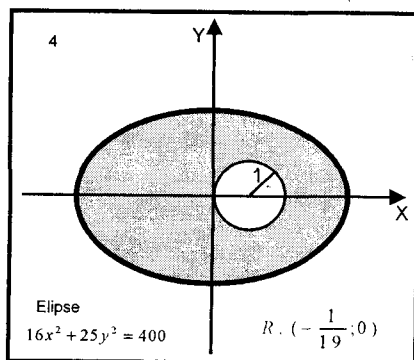
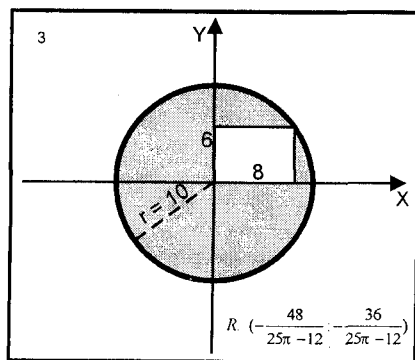
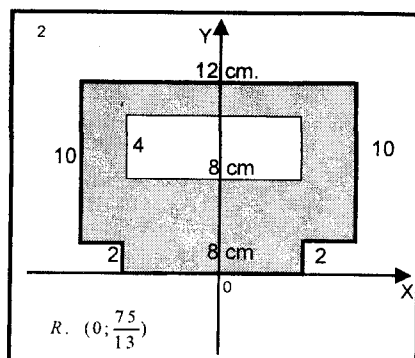
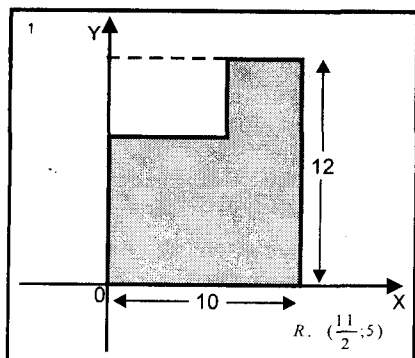
$$\begin{aligned} 3 &= \frac{|m\bar{x} - \bar{y} - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow 3 = \frac{|-3 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} \\ \Leftrightarrow 9(m^2 + 1) &= 9 + 6m + m^2 \Leftrightarrow m(4m - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow m &= 0 \quad \text{ó} \quad m = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Como la recta L es oblicua, $m = \frac{3}{4}$. Por tanto, la ecuación de la recta L es

$$3x - 4y - 3 = 0$$

EJERCICIOS

- I. En cada uno de los ejercicios, encuentre el centroide de la lámina homogénea de densidad ρ que tiene la forma mostradas en la figura.



- II. En los siguientes ejercicios, encuentre el centro de gravedad de cada una de las regiones limitadas por las siguientes curvas.

1. $y = x^2 - 4$, $y = 2x - x^2$

R. $(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$

2. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$

R. $(0; \frac{4a}{3\pi})$

3. $y = 3x$, $y = x^2$, $y = 1$, $y = 2$ (en el primer cuadrante)

R. $(\frac{67}{18(8\sqrt{2} - 7)}; \frac{2(72\sqrt{2} - 53)}{15(8\sqrt{2} - 7)})$

4. $y = x^2$, $y = x - x^2$ R. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right)$
5. $y = \ln x$, $y = 4$, $y = 4 - 4x^2$ (en el primer cuadrante) R. (14,61; 3,15)
6. $y = x^2 + 1$, $y = x^3 - 1$, $x = 0$, $x = 1$
7. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$ desde $x = 0$ hasta $x = \frac{\pi}{2}$
R. $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)(2 + \sqrt{3})\right)$
8. $y^2 = 4 - 2x$, el eje y , $y = 3$
9. $x = 4y - y^2$, $y = x$ R. $\left(\frac{12}{5}; \frac{3}{2}\right)$
10. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$, $y = 0$, $x = 0$ R. $\left(\frac{9}{5}; \frac{9}{5}\right)$
11. $y = |x|^3 + 1$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$
12. $x + xy^2 - 2 = 0$, $x - y^2 = 0$
13. $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$ R. (9; 9)
14. $y = -x$, $y = \begin{cases} x & , \text{ si } x \leq 1 \\ x^2 & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$, $x = 2$
15. $x - 2y + 8 = 0$, $x + 3y + 5 = 0$, $x = -2$, $x = 4$ R. $\left(\frac{88}{39}; \frac{50}{39}\right)$
16. $y = 3 + 2x - x^2$, y los ejes coordenados encierran dos regiones. Determine el centroide de la región de menor área.
17. $y(x^2 + 4a^2) = 8a^3$ y el eje x (región infinita) R. $\left(0; \frac{1}{2}a\right)$
18. La región limitada por el lazo de $y^2 = x(x - 4)^2$ R. $\left(\frac{12}{7}; 0\right)$
19. La región limitada por el lazo de $y^2 = x^4(3 - x)$ R. (2; 0)
20. $y = \arcsen x$, $y = 0$, $x = 1$
21. $y^2 = 4x^2 - x^3$, $y = 0$ en el primer cuadrante R. $\left(\frac{16}{7}; \frac{5}{4}\right)$

22. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 6x - x^2 - 3$ R. (2;1)
23. $y = x^3 - 3x$, $y = x$, sobre el lado derecho del eje y R. $\left(\frac{16}{15}; -\frac{24}{35}\right)$
24. La región encerrada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en el primer cuadrante R. $\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}\right)$
25. La región está limitada por los ejes coordenados y $x^{2/3} + y^{2/3} = \sqrt[3]{25}$ R. $\left(\frac{256}{63\pi}; \frac{256}{63\pi}\right)$
26. La región es un sector circular de radio r y ángulo central 2α
R. En el eje de simetría, a la distancia $\frac{2}{3}r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ del vértice del sector
27. $y = \sin x$, $(0 \leq x \leq \pi)$, $y = 0$ R. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$
28. $y = \cosh x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$
29. $y = \arccos x$, $y = \pi$, $x = 1$

III. Centro de gravedad y volúmenes.

1. El centro de gravedad de la región acotada por las curvas $x^2 = 4y$, $y = mx$ es un punto de abscisa igual a 2. Determine el valor de m R. $m = 1$
2. $A(0;0)$, $B(a;0)$ y $C(0;a/2)$ con $a > 0$, son los vértices de un triángulo. Calcule el volumen del sólido obtenido por la rotación en torno a la recta $y = x - a$, de la región limitada por el triángulo ABC . R. $\frac{5\sqrt{2}\pi a^3}{24}$
3. Sea R la región del plano limitado por la parábola $y = x^2 - 1$ y la recta $y = x - 1$. Determine el volumen del sólido obtenido por la rotación de la región R alrededor de la recta $y = x - 1$. R. $\frac{\pi\sqrt{2}}{60}$
4. La región limitada por las gráficas de $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$ gira alrededor de la recta $3x + 4y + 12 = 0$. Calcule el volumen del sólido generado. R. 4000π

5. La región limitada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 5$ gira alrededor de una recta oblicua que pasa por el punto $(-1; 0)$. Halle la ecuación de la recta si el volumen generado es igual a $(40\sqrt{5}\pi)u^3$ R. $3x + 4y + 3 = 0$

- IV. El centro de gravedad $(\bar{x}; \bar{y})$ del arco de una curva (homogénea), cuya ecuación es $y = f(x)$ con $x \in [a; b]$, donde f es una función con derivada continua en $[a; b]$, está dado por

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}, \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

Usando estas fórmulas, determine el centro de gravedad de las curvas cuyas ecuaciones son

1. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ R. $\left(0; \frac{2a}{\pi}\right)$
2. $y = a \cosh \frac{x}{a}$, $x \in [-a; a]$ R. $\left(0; \frac{a(e^4 + 4e^2 - 1)}{4e(e^2 - 1)}\right)$
3. $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$ R. $\left(\pi a; \frac{4a}{3}\right)$
4. $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ R. $\left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5}\right)$

4.7 APLICACIONES DE LA INTEGRAL EN LOS NEGOCIOS

4.7.1 EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR

Consideremos la función demanda $p = f(q)$ de un determinado artículo, donde q representa la cantidad de artículos que se demandan al precio unitario p . La gráfica de esta función es la curva de demanda.

Si el precio en el mercado del artículo en mención es p_0 y la correspondiente cantidad demandada es q_0 , entonces los consumidores que estuviesen en condiciones de pagar por el artículo un precio mayor que p_0 ganan, por el simple hecho de que el precio en el mercado es menor.

Bajo ciertas hipótesis económicas, la ganancia total del consumidor se representa por el área bajo la curva de demanda y sobre la recta $p = p_0$ (Fig. 4.73). A esta área se le denomina **excedente del consumidor** (EC) y está dado por

$$EC = \left(\int_0^{q_0} [f(q) - p_0] dq \right) \text{ u. m.} = \left(\int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0 \right) \text{ u. m.}$$

Una forma alternativa de calcular el excedente del consumidor es

$$EC = \left(\int_{p_0}^{p_1} g(p) dp \right) \text{ u. m.}, \text{ donde } g = f^{-1} \text{ y } p_1 = f(0)$$

(u. m. significa unidades monetarias)

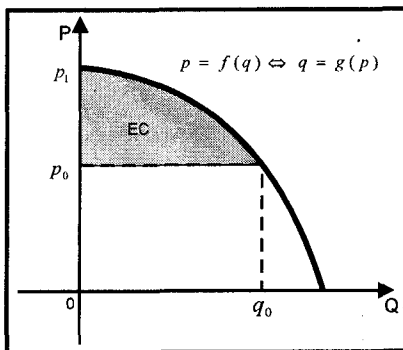


Fig. 4.73

4.7.2 EXCEDENTE DEL PRODUCTOR

Consideremos la función oferta $p = f(q)$ de un determinado artículo, donde q es la cantidad de artículos ofertados al precio unitario p . La gráfica de esta función es la curva de oferta.

Si el precio en el mercado del artículo en mención es p_0 y la correspondiente cantidad ofertada es q_0 , entonces los productores que estuviesen en condiciones de vender el artículo a un precio menor, ganan, por el simple hecho de que el precio en el mercado es mayor.

Bajo ciertas hipótesis económicas, la ganancia total del productor se representa por el área sobre la curva de oferta y bajo la recta $p = p_0$ (Fig. 4.74). A esta área se denomina **excedente del productor** (EP) y está dado por

$$EP = \left(\int_0^{q_0} [p_0 - f(q)] dq \right) \text{ u.m.} = \left(p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q) dq \right) \text{ u.m.}$$

Una forma alternativa de excedente del productor es

$$EP = \left(\int_{p_1}^{p_0} g(p) dp \right) \text{ u.m.}, \text{ donde } g = f^{-1} \text{ y } p_1 = f(0)$$

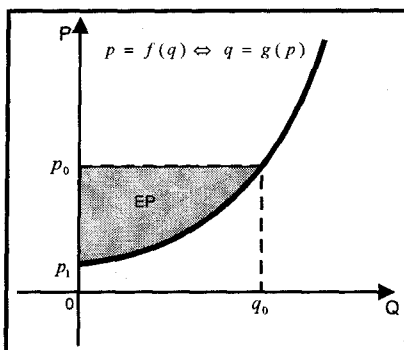


Fig. 4.74

Ejemplo 49 Si la función demanda es $p = 9 - q^2$ y $p_0 = 5$. Halle el excedente del consumidor.

Solución

La región se muestra en la figura 4.75. Con la ayuda de la figura se obtiene

$$EC = \int_0^2 [(9 - q^2) - 5] dq = \frac{16}{3} \text{ u. m.}$$

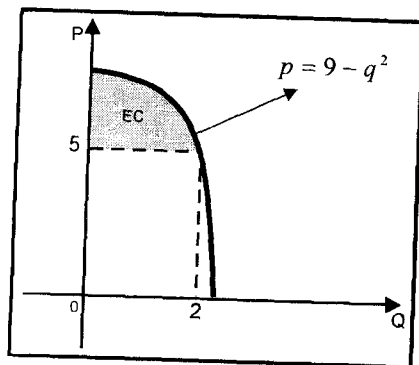


Fig. 4.75

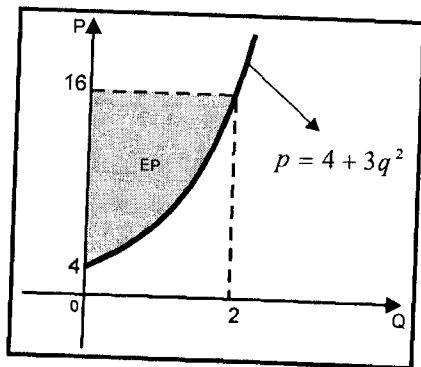


Fig. 4.76

Ejemplo 50 Si la función de oferta es $p = 4 + 3q^2$ y $q_0 = 2$. Calcule el excedente del productor.

Solución

La región se muestra en la figura 4.76. Así, resulta

$$EP = \int_0^2 [16 - (4 + 3q^2)] dq = 16 \text{ u. m.}$$

Ejemplo 51 Las funciones de demanda y de oferta, en situación de competencia perfecta son $p = 227 - \frac{1}{4}q^2$ y $p = 2 + 2q^2$ respectivamente. Determine el correspondiente excedente del consumidor y el excedente de productor.

Solución

El precio en el mercado y la correspondiente cantidad está determinado por el punto de equilibrio E (Fig. 4.77). El punto de equilibrio es la intersección de las curvas de oferta y de demanda, esto es,

$$227 - \frac{1}{4}q^2 = 2 + 2q^2 \Rightarrow q^2 = 100 \Rightarrow q_e = 10, \text{ de donde } p_e = 202$$

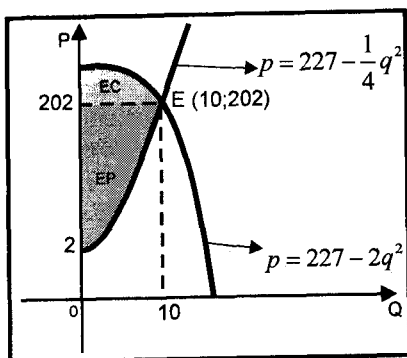


Fig. 4.77

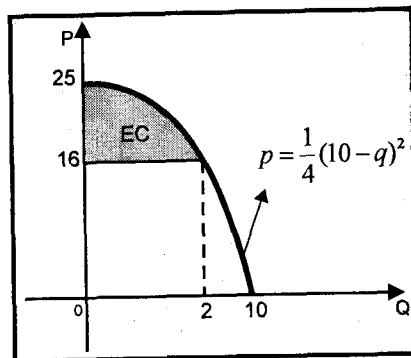


Fig. 4.78

Luego,

$$EC = \int_0^{10} \left[227 - \frac{1}{4}q^2 - 202 \right] dq = \frac{500}{3} \text{ u. m.}$$

$$EP = \int_0^{10} [202 - (2 + 2q^2)] dq = \frac{4000}{3} \text{ u. m.}$$

Ejemplo 52 La cantidad vendida y el correspondiente precio, en situación de monopolio, se determinan por la función de demanda $p = \frac{1}{4}(10 - q)^2$ y el costo total es $C = \frac{q^3}{4} + 5q$ de tal manera que se maximice la utilidad. Determine el correspondiente excedente del consumidor.

Solución

La utilidad es $U = I - C$, I = ingreso y C = costo total

$$U' = 0 \Rightarrow I' - C' = 0 \Rightarrow IM_g = CM_g$$

“La utilidad se maximiza si el ingreso marginal ($I' = IM_g$) es igual al costo marginal ($C' = CM_g$)”.

Como $I = pq$ donde p = precio de venta y q = cantidad vendida, entonces

$$I = \frac{1}{4}(10 - q)^2 q \Rightarrow IM_g = 25 - 10q + \frac{3}{4}q^2$$

$$\text{Luego } IM_g = CM_g \Rightarrow 25 - 10q + \frac{3}{4}q^2 = \frac{3}{4}q^2 + 5 \Rightarrow q = 2$$

En $q = 2$, la utilidad es máxima porque $U''(2) = -10$

Por tanto,

$$EC = \int_0^2 \left[\frac{1}{4}(10 - q)^2 - 16 \right] dq = \frac{26}{3} \quad (\text{Fig. 4.78})$$

4.7.3 OTRAS APLICACIONES

Ejemplo 53 Actualmente el kilo de huevo cuesta S/. 4,6. Los estudios realizados indican que dentro de x semanas, el precio estará cambiando a razón de $0,09 + 0,0006x^2$ soles por semana. ¿Cuánto costará el kilo de huevos dentro de 10 semanas?

Solución

Como $\frac{dp}{dx} = 0,09 + 0,0006x^2 \Rightarrow \int_0^{10} (0,09 + 0,0006x^2) dx$ es el aumento en el precio dentro de 10 semanas

Luego, dentro de 10 semanas el kilo de huevo costará

$$p = 4,6 + \int_0^{10} (0,09 + 0,0006x^2) dx = 4,6 + 1,1 = \text{S/. } 5,7$$

Ejemplo 54 Halle la cantidad producida que maximiza la utilidad y la correspondiente utilidad total (suponiendo competencia perfecta) si el ingreso marginal es $IM_g = 24 - 6q - q^2$ y el costo marginal es $CM_g = 4 - 2q - q^2$.

Solución

La utilidad se maximiza (suponiendo competencia perfecta) cuando el ingreso marginal (IM_g) es igual al costo marginal (CM_g), luego

$$24 - 6q - q^2 = 4 - 2q - q^2 \Rightarrow q = 5$$

Como $U' = UM_g = IM_g - CM_g = 20 - 4q$ y $U''(5) < 0$, entonces la utilidad se maximiza cuando $q = 5$ y la utilidad máxima es

$$U = \int_0^5 (20 - 4q) dq = 50 \text{ u.m.}$$

Ejemplo 55 Una empresa textil ha comprado una máquina cuya producción representa ganancias en un tiempo t dadas por $G = 27 - 2t^2$, donde G está en unidades de S/. 3000 y t está en años. El costo de reparación y mantenimiento en el tiempo t está dado por $R(t) = \frac{1}{3}t^2 + 2t$, donde R está en unidades de S/. 3000 y t está en años. Suponiendo que la máquina puede retirarse sin costo alguno en cualquier tiempo, ¿cuántos años se debe mantener la máquina para maximizar la utilidad neta?

Solución

Las ganancias son iguales al costo de reparación y mantenimiento (Fig. 4.6) cuando

$$27 - 2t^2 = \frac{1}{3}t^2 + 2t \Rightarrow t = 3$$

Por tanto, la máquina debe retirarse después de 3 años. La utilidad neta después de 3 años es

$$UN = \int_0^3 [G(t) - R(t)] dt = \int_0^3 \left(27 - 2t - \frac{7}{3}t^2 \right) dt = 51$$

Luego, la utilidad neta después de 3 años es de 153 000 soles.

Ejemplo 56 El valor de reventa de cierta máquina industrial disminuye durante un período de 10 años a una tasa que cambia con el tiempo.

Cuando la máquina tiene x años, la tasa a la cual está cambiando su valor es de $220(x - 10)$ soles por año. ¿En qué cantidad se deprecia la máquina al cumplir dos años y cuál es su precio de reventa si su costo fue de S/. 12 000?

Solución

Si V es el valor de la máquina, $\frac{dV}{dx} = 220(x - 10)$; luego,

$$V(x) = \int 220(x - 10) \Rightarrow V(x) = 110x^2 - 2200x + C$$

Como $V(0) = 12\,000 \Rightarrow C = 12\,000$ y $V(x) = 110x^2 - 2200x + 12\,000$.

Por tanto, $V(2) = 8\,040$

El precio de reventa es de S/. 8040, y la máquina ha sufrido una depreciación de S/. 3960.

Otro método para resolver este problema. El valor de depreciación es

$$\int_0^2 220(x - 10) dx = -3\,960$$

Esto significa que la máquina, en dos años se deprecia en S/. 3 960, en este tiempo el valor de reventa es $12\,000 - 3960 = \text{S}/. 8\,040$

EJERCICIOS

1. Si la función demanda es $p = 25 - q^2$, halle el excedente del consumidor si la cantidad demandada en el mercado es $q_0 = 3$ R. 18 u. m.
2. Si la función de oferta es $p = 3 \ln(q + 2)$, halle el excedente del productor si el precio de venta en el mercado es $p_0 = 3$
3. Las funciones de demanda y oferta en situación de libre competencia son $p = \frac{1}{4}(9 - q)^2$ y $p = \frac{1}{4}(1 + 3q)$ respectivamente. Calcule el excedente del consumidor y el excedente del productor.

4. La cantidad vendida y el correspondiente precio, en situación de monopolio, se determinan por la función de demanda $p = 45 - q^2$ y el costo total $C = 7 + 6q + q^3/12$ de manera que se maximice la utilidad. Calcule el correspondiente excedente del consumidor. R. $16\sqrt{3}$ u. m.
5. El valor de venta de cierta máquina industrial disminuye a una tasa que cambia con el tiempo. Cuando la máquina tiene t años, la tasa a la cual está cambiando su valor es $-960e^{-t/5}$ soles por año. Si el costo de la máquina fue de S/. 5000, ¿cuál será su valor 10 años más tarde? R. S/. 849,63
6. Un fabricante calcula que sus ingresos marginales son de $\sqrt{10000q}$ soles por unidad cuando su producción es de q unidades. Se ha encontrado que su costo marginal correspondiente es de $0,4q$ soles por unidad. Cuando su nivel de producción es de 16 unidades, su utilidad es de S/. 520. ¿Cuál es su utilidad cuando su nivel de producción es de 25 unidades? R. S/. 646,20
7. Un fabricante ha encontrado que su costo marginal es de $6q + 1$ soles por unidad cuando se han producido q unidades. El costo total de la primera unidad es de S/. 130
 - a) ¿Cuál es el costo de producción de las 10 primeras unidades?
 - b) ¿Cuál es el costo de producción de la décima unidad?
 - c) ¿Cuál es el costo fijo?

R. a) S/. 436 b) S/. 58 c) S/. 126
8. La tasa de crecimiento de la población de cierta ciudad cambia con el tiempo. Los estudios indican que dentro de x meses la tasa de crecimiento de la población será de $4 + 5x^{2/3}$ personas por mes. La población actual es de 10000 habitantes. ¿Cuál será la población dentro de 8 meses? R. 10125 personas
9. El precio del pollo es actualmente de S/. 4,5 por kilo. Se espera que dentro de x semanas el precio estará aumentando a una tasa de $0,03\sqrt{x+1}$ soles por semana. ¿Cuánto costará el kilo de pollo dentro de 8 semanas? R. S/. 5,02 el kilo
10. Halle la cantidad que maximiza la utilidad y la correspondiente utilidad máxima si el ingreso marginal es $IM_g = 20 - 2q$ y el costo marginal es $CM_g = 4 + (q - 4)^2$
11. Las funciones de oferta y demanda son, respectivamente $p = 1 + \ln(q + 1)$ y $p = 5 - \ln(q + 1)$. Halle el excedente del consumidor y el excedente del productor. R. $EC = EP = (e^2 - 3)$ u. m.
12. Los promotores de una feria de una ciudad calculan que t horas después de que se abran las puertas (9 a.m.) los visitantes estarán entrando a la feria a una tasa de $54(t + 2)^2 - 4(t + 2)^3$ personas por hora. ¿Cuántas personas entrarán a la feria entre las 10 a.m. y el medio día?

13. Una empresa ha comprado una máquina cuya cantidad producida representa ganancias en un tiempo t dadas por $G(t) = 20 - 3t^2$, donde t está en años y G está en unidades de S/. 10000. El costo de reparación y mantenimiento en el tiempo está dado por $R(t) = 2t^2$, donde R está en unidades de S/. 10000 y t está en años. Suponiendo que la máquina se puede retirar sin costo alguno en cualquier tiempo t , ¿Cuántos años se debe mantener la máquina para maximizar las ganancias netas totales?
- R. Dentro de 2 años y $UN = S/. 266\ 666,66$
14. Una compañía está considerando la adición de personal para propaganda. El costo de adición de este personal está dado por $C(x) = \frac{1}{2}x$, donde C está en unidades de S/. 600 y x es el número de personas agregadas. El ingreso obtenido con el personal adicional es $I(x) = 2\sqrt{x}$, donde I está en unidades de S/. 600 y x es el número de personas agregadas. ¿Qué número de personas para propagandas deben agregarse para maximizar la utilidad, cuál es el ingreso neto adicional (suponer que las funciones son continuas)?
15. La utilidad marginal de cierta compañía es de $100 - 2x$ soles por unidad cuando se producen x unidades. Si la utilidad de la compañía es de S/. 700 cuando se producen 10 unidades ¿Cuál es la utilidad máxima posible de la compañía?
- R. S/. 2300
16. El costo marginal de un fabricante es de $3(q - 4)^2$ soles por unidad cuando su nivel de producción es de q unidades.
- a) Exprese el costo total de producción del fabricante en términos de sus gastos generales (costo fijo) y el número de unidades producidas.
- b) ¿Cuál es el costo de la producción de 14 unidades si el costo fijo es de S/. 436?
17. Las funciones de demanda y de oferta, en situación de competencia pura son respectivamente, $p = 30 - q^2$ y $p = 2q^2 + 3$, halle el excedente del productor.
18. Si la función de demanda es $p = \sqrt{20 - q}$ y la cantidad demandada es $q_0 = 4$, halle el excedente del consumidor.
19. Halle la cantidad producida que maximice la utilidad (suponiendo competencia pura) y determinar la utilidad total en dicho punto si las funciones de ingreso marginal y de costo total están dadas por
- $IM_g = 24 - 5q - 2q^2$ y $CM_g = 11 - 3q - q^2$

COORDENADAS POLARES

5.1 SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

La posición de un punto P en un plano se puede indicar usando las **coordenadas polares**. Para ello, se considera una semirrecta orientada \overrightarrow{OA} llamada **eje polar**, que usualmente se considera en forma horizontal y que se extiende hacia la derecha (Fig. 5.1); al origen O del eje polar se denomina **origen o polo**.

A cada punto P del plano se le asigna un par $(r; \theta)$ donde r es la longitud del segmento \overline{OP} y θ es la medida en radianes del ángulo cuyo lado inicial es el eje polar y el lado terminal es el segmento \overline{OP} .

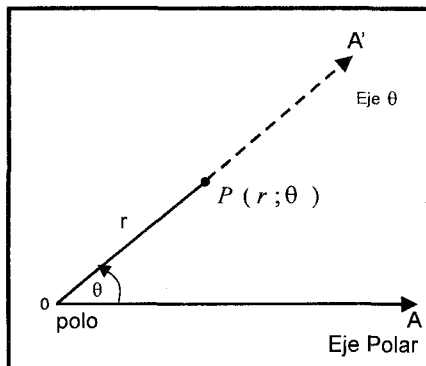


Fig. 5.1

Al par $(r; \theta)$ se denomina **coordenadas polares** de P y se denota $P(r; \theta)$, r es llamado **radio vector** y θ es el **ángulo polar**. De la Fig. 5.1 podría deducirse que $r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, pero éstas no son las condiciones generales. Para asociar las coordenadas polares a un punto y formar el **sistema de coordenadas polares** en el plano es necesario tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Si el ángulo AOP se desplaza a partir de \overrightarrow{OA} en sentido antihorario, θ es positivo y negativo en caso contrario.
2. A la semirrecta $\overrightarrow{OA'}$ que forma con el eje polar un ángulo de medida θ se denomina **eje θ** . El radio vector r es positivo si P está situado en el eje θ , y es negativo si P está en la prolongación del eje θ .
3. El polo O está unívocamente determinado por $r = 0$, es decir, al polo se le puede asignar el par $(0; \theta)$, donde θ es cualquier número real.

Ejemplo 1. Ubique en el plano los puntos cuyas coordenadas polares son

$$A\left(3; \frac{\pi}{6}\right), B\left(-4; \frac{\pi}{4}\right), C(2; \pi), D\left(-2, 5; -\frac{2\pi}{3}\right), E\left(3; \frac{11\pi}{4}\right), F(3; -1)$$

Solución

Para ubicar estos puntos con mayor facilidad usaremos la **roseta polar** (Fig. 5.2).

En esta roseta polar, r es constante en cada circunferencia y en cada semirrecta, θ es constante. Así, los puntos A, B, C, D, E y F se muestran en la Fig. 5.2.

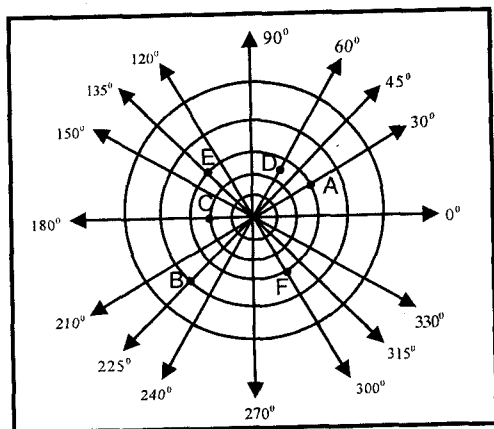


Fig. 5.2

Observación 1

- a) Para establecer la correspondencia biunívoca entre puntos del plano y las coordenadas polares se debe considerar los valores principales

$$r \geq 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (1)$$

- b) Cuando no se considera la restricción (1) a un punto dado, se puede asociar infinitos pares de coordenadas polares $(r; \theta)$. Si las coordenadas polares de P son $(r; \theta)$, también son coordenadas de P los pares:

$$((-1)^n r; \theta + n\pi), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Por ejemplo, al punto $C(2; \pi)$ se puede asociar las coordenadas polares

$$(-2; 2\pi), (2; 3\pi), (2; -\pi), (2; 5\pi), (-2; 6\pi), \dots, \text{etc.}$$

5.2 RELACIÓN ENTRE LAS COODENADAS POLARES Y LAS COORDENADAS RECTANGULARES

Consideremos el sistema de coordenadas rectangulares xOy , con $\overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{OA}$, donde \overrightarrow{OA} es el eje polar (Fig. 5.3).

Si P es un punto del plano cuyas coordenadas rectangulares y polares son $(x; y)$ y $(r; \theta)$ respectivamente, el cambio de coordenadas rectangulares a coordenadas polares se efectúa considerando las relaciones:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (3)$$

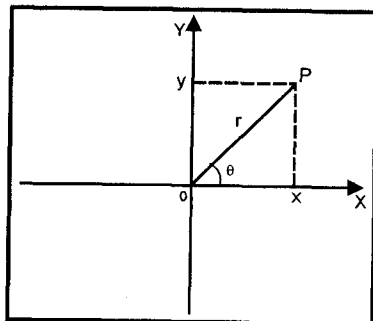


Fig. 5.3

Inversamente, el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares se efectúa a través de las relaciones

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 & \text{ó} & r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} & \text{ó} & \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad (4)$$

Ejemplo 2

a) Halle las coordenadas rectangulares del punto $P\left(4; \frac{\pi}{6}\right)$.

b) Halle las coordenadas polares del punto $P(-\sqrt{3}; -1)$.

Solución

a) $r = 4$, $\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 4 \cos \frac{\pi}{6}$, $y = 4 \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow P(2\sqrt{3}; 2)$.

b) $x = -\sqrt{3}$, $y = -1 \Rightarrow r = \pm 2$

$\tan \theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} \quad (3er \text{ cuadrante}) \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow P\left(2; \frac{7\pi}{6}\right)$

Ejemplo 3. En (a) y (b) halle la ecuación polar de la curva dada y en (c) y (d) halle la ecuación cartesiana de la curva.

a) $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ (circunferencia)

b) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$ (lemniscata de Bernoulli)

c) $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ (circunferencia)

d) $r = \frac{2}{2 - \cos \theta}$ (elipse)

Solución

a) $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2 \Rightarrow r = \pm a$

La ecuación polar de una circunferencia de radio a ($a > 0$) y centro en el origen es $r = a$ ó $r = -a$.

b) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \Rightarrow r^4 = a^2(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)$
 $\Rightarrow r^2 = a^2 \cos^2 2\theta$

c) $r = 4 \operatorname{sen} \theta \Rightarrow r = 4 \frac{y}{r} \Rightarrow r^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 = 4y$
 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ (circunferencia de centro $(0; 2)$ y radio 2)

d) $r = \frac{2}{2 - \cos \theta} \Rightarrow r = \frac{2}{2 - \frac{x}{r}} \Rightarrow 1 = \frac{2}{2r - x}$
 $\Rightarrow 2r - x = 2 \Rightarrow 4r^2 = (2 + x)^2 \Rightarrow 4(x^2 + y^2) = (2 + x)^2$
 $\Rightarrow 3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0$ (elipse)

5.3 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN COORDENADAS POLARES

La distancia entre los puntos $A(r_1; \theta_1)$ y $B(r_2; \theta_2)$ está dada por

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

La demostración se realiza usando la ley de los cosenos en el triángulo AOB (Fig. 5.4).

Por ejemplo, la distancia entre los puntos $A(-3; 7\pi/12)$ y $B(5; \pi/4)$ es

$$d = \sqrt{9 + 25 + 30 \cos \frac{\pi}{3}} = 7$$

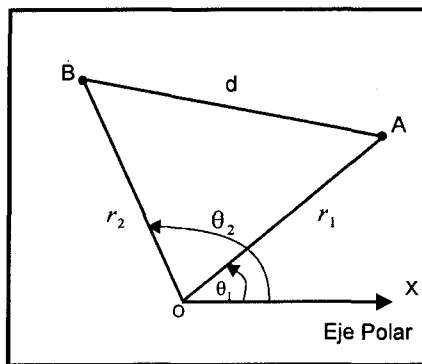


Fig. 5.4

5.4 ECUACIÓN POLAR DE UNA RECTA

- I. Sea L una recta que no pasa por el origen. Si $N(p; \omega)$ es el par principal de coordenadas polares del pie de la perpendicular trazada del polo a la recta L y $P(r; \theta)$ es un punto de la recta L (Fig. 5.5), la ecuación polar de la recta es

$$r \cos(\theta - \omega) = p \quad (5)$$

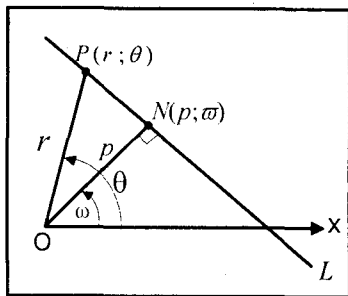


Fig. 5.5

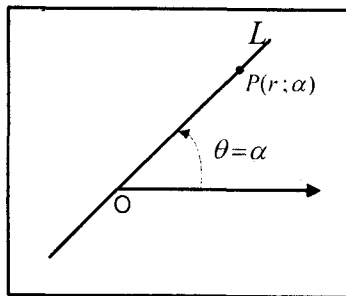


Fig. 5.6

- II. Si la recta L pasa por el origen (Fig. 5.6), su ecuación polar es

$$\theta = \alpha, \alpha \text{ constante}$$

Observación 2

- i) Si la recta es perpendicular al eje polar y está a p unidades del polo, la ecuación (5) se transforma en

$$r = \cos \theta = \pm p, \quad p > 0 \quad (6)$$

El signo de p es positivo si la recta está a la derecha del polo, y es negativo si está a la izquierda.

- ii) Si la recta es paralela al eje polar y está a p unidades del polo, la ecuación (5) se transforma en

$$r \sin \theta = \pm p, \quad p > 0 \quad (7)$$

El signo de p es positivo si la recta está por encima del eje polar, y es negativo si está por debajo del eje polar.

- iii) La ecuación polar $r \cos(\theta - \omega) = p$ es equivalente a la ecuación (cartesiana) normal de la recta

$$x \cos \omega + y \sin \omega = p$$

- iv) Una ecuación polar de la recta que pasa por los puntos $A(r_1; \theta_1)$ y $B(r_2; \theta_2)$ es

$$r_1 r \sin(\theta_1 - \theta) + r_2 r \sin(\theta - \theta_2) = r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (8)$$

Ejemplo 4

- a) Halle la ecuación de la recta perpendicular al eje polar que pasa por el punto $A(6; 2\pi/3)$.
- b) Halle la ecuación de la recta paralela al eje polar que pasa por el punto $B(2\sqrt{2}; \pi/4)$.
- c) Halle la ecuación polar de la recta cuya ecuación cartesiana es $3\sqrt{3}x + 3y + 24 = 0$
- d) Halle una ecuación en coordenadas polares de la recta que pasa por los puntos $A(4; 2\pi/3)$ y $B(2\sqrt{2}; \pi/4)$

Solución

- a) En la Fig. 5.7 se observa

$$p = 6 \cos(2\pi/3) = -3$$

Luego, la ecuación polar de la recta L es

$$r \cos \theta = -3$$

- b) $p = 2\sqrt{2} \cos(\pi/4) = 2$. Luego, la ecuación polar de la recta es

$$r \sin \theta = 2$$

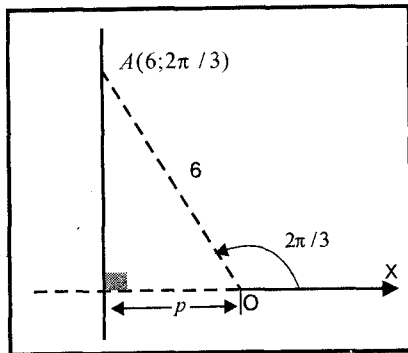


Fig. 5.7

- c) Considerando la equivalencia de la ecuación polar con la ecuación normal, es necesario transformar la ecuación dada en su forma normal. Por geometría analítica, se sabe que si la ecuación cartesiana de una recta es de la forma

$$Ax + By + C = 0, \quad C \neq 0 \quad (*)$$

la ecuación normal se obtiene dividiendo (*) entre $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$, donde el signo del radical es opuesto al signo de C . En nuestro caso, se tiene $A = 3\sqrt{3}$,

$B = 3$ y $C = +24$. Por tanto, dividimos entre $-\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = -6$ y la ecuación normal de la recta es:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 4$$

De esta ecuación se deduce que $\cos \omega = -\sqrt{3}/2$, $\sin \omega = -1/2$ y $p = 4$. De los valores del seno y del coseno se concluye que ω está en el tercer cuadrante y $\omega = 7\pi/6$. Por tanto, la ecuación polar de la recta es

$$r \cos(\theta - 7\pi/6) = 4$$

- d) La ecuación polar de la recta que pasa por los puntos $A(4; 2\pi/3)$ y $B(2\sqrt{2}; \pi/4)$, usando la fórmula (8), está dada por

$$4r \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + 2\sqrt{2} r \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{12}$$

5.5 ECUACIÓN POLAR DE UNA CIRCUNFERENCIA

La ecuación polar de una circunferencia de centro $C(\rho; \alpha)$ y radio a , $a > 0$, es

$$r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \alpha) = a^2 \quad (9)$$

En la Fig. 5.8 se observa que si $P(r; \theta)$ es un punto de la circunferencia, aplicando la ley de los cosenos en el triángulo OCP , se obtiene la ecuación (9).

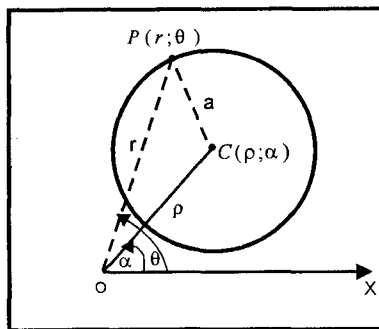


Fig. 5.8

Observación 3

- i) Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está en el eje polar (o su prolongación), la ecuación (9) se reduce a

$$r = 2\rho \cos \theta \quad (10)$$

El centro de esta circunferencia es $C(\rho; 0)$ y su radio es $|\rho|$.

- ii) Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está en el eje $\pi/2$ (o su prolongación), la ecuación (9) se reduce a

$$r = 2\rho \sin \theta \quad (11)$$

El centro de esta circunferencia es $C(\rho; \pi/2)$ y su radio es $|\rho|$.

- iii) Si el centro es el polo ($\rho = 0$), la ecuación (9) se reduce a

$$r = \pm a \quad (12)$$

Ejemplo 5. Halle la ecuación polar de la circunferencia tal que:

- a) Su centro es el polo y su radio es 4 b) Su centro es $C(-5; \pi/2)$ y su radio es 5
c) Su centro es $C(3; 0)$ y su radio es 3 d) Su centro es $C(3; \pi/6)$ y su radio es 8

Solución

Usando convenientemente las fórmulas dadas en (9), (10), (11) ó (12) se tiene

- a) La ecuación de la circunferencia es $r = 4$ o $r = -4$.
b) La ecuación de la circunferencia es $r = 6 \cos \theta$.
c) La ecuación de la circunferencia es $r = -10 \sin \theta$.
d) La ecuación de la circunferencia es $r^2 - 6r \cos(\theta - \pi/6) = 55$.

5.6 DISCUSIÓN Y GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN POLAR

Para trazar la gráfica de una ecuación en coordenadas polares $E(r; \theta) = 0$, es conveniente realizar los siguientes pasos:

I) Intersecciones

- Con el eje polar. Se hace $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, y se resuelve la ecuación resultante.
- Con el eje $\pi/2$. Se hace $\theta = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, y se resuelve la ecuación resultante.
- Con el polo. Se hace $r = 0$ y se resuelve la ecuación que resulta.

II) Simetrías

- Con respecto al eje polar. En la ecuación se reemplaza $(r; \theta)$ por $((-1)^n r; -\theta + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Si la ecuación no varía para algún valor de n , la curva es simétrica con respecto al eje polar; si la ecuación varía para todo $n \in \mathbb{Z}$, la curva no es simétrica con respecto al eje polar.
- Con respecto al eje $\pi/2$. En la ecuación se reemplaza $(r; \theta)$ por $(-(-1)^n r; -\theta + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Si la ecuación no varía para algún valor de n , la curva es simétrica con respecto al eje $\pi/2$; si la ecuación varía para todo $n \in \mathbb{Z}$, la curva no es simétrica.
- Con respecto al polo. Se reemplaza $(r; \theta)$ por $(-(-1)^n r; \theta + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, en la ecuación de la curva. Si la ecuación no varía para algún valor de n , la curva es simétrica con respecto al polo; si la ecuación varía para todo $n \in \mathbb{Z}$, la curva no es simétrica.

(*) Si $P(r; \theta)$ es cualquier punto de la curva cuya ecuación polar es $E(r; \theta) = 0$, el punto simétrico de P con respecto al eje polar es $S(r; -\theta)$ (Fig. 5.9).

Por observación 1, también son coordenadas del punto S los pares $((-1)^n r; -\theta + n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Si el punto S pertenece a la curva, $((-1)^n r; -\theta + n\pi)$ también satisface la ecuación para algún valor de n , es decir, la ecuación no varía.

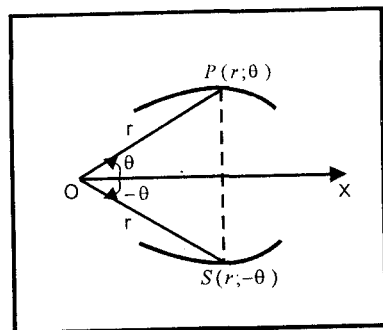


Fig. 5.9

Por otro lado, si $((-1)^n r; -\theta + n\pi)$ no satisface la ecuación de la curva para todo $n \in \mathbb{Z}$, significa que S no pertenece a la curva, es decir, la curva no es simétrica respecto al eje polar. De manera similar se deducen las condiciones para que una curva sea simétrica con respecto al eje $\pi/2$ y al polo.

III) **Extensión.** Se determina la variación de r y θ

IV) **Tabulación.** Se tabulan los valores de r y θ .

V) **Trazado de la gráfica.** En un sistema de coordenadas polares (es preferible usar la roseta polar) se localizan los puntos obtenidos y se traza la curva con la información obtenida en la discusión.

Ejemplo 6. Determine si son simétricas o no respecto al eje polar, al eje $\pi/2$ y al polo, las curvas cuyas ecuaciones son:

a) $r = 4 \cos \theta + 2$ (caracol)

b) $r^2 = 9 \left[\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + 1 \right]$

c) $r = 3(1 + \cos \theta)$ (cardioide)

Solución

a) i) Respecto al eje polar. Reemplazando en la ecuación $(r; \theta)$ por $(r; -\theta)$, se obtiene que $r = 4 \cos(-\theta) + 2 = 4 \cos \theta + 2$. Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje polar.

ii) Respecto al eje $\pi/2$. Al reemplazar $(r; \theta)$ por $(-(-1)^n r; -\theta + n\pi)$, se tiene que $-(-1)^n r = 4 \cos(-\theta + n\pi) + 2$.

Si n es par $\Rightarrow -r = 4 \cos \theta + 2$ (varía).

Si n es impar $\Rightarrow r = 2 - 4 \cos \theta$ (varía).

Luego, la curva no es simétrica porque la ecuación varía para todo $n \in \mathbb{Z}$.

iii) Respecto al polo. Al reemplazar $(r; \theta)$ por $(-(-1)^n r; \theta + n\pi)$, se tiene que $-(-1)^n r = 4 \cos(\theta + n\pi) + 2$.

Si n es par $\Rightarrow -r = 4 \cos \theta + 2$ (varía)

Si n es impar $\Rightarrow r = 2 - 4 \cos \theta$ (varía)

La curva no es simétrica con respecto al polo. La gráfica del caracol $r = 4 \cos \theta + 2$ se muestra en la figura 5.10.

b) i) Respecto al eje polar. Para $n = 2$, es decir, reemplazando $(r; \theta)$ por $(r; 2\pi - \theta)$, se tiene

$$r^2 = 9 \left[\sin \left(\frac{2\pi - \theta}{2} \right) + 1 \right] \Rightarrow r^2 = 9 \left[\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + 1 \right]$$

Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje polar.

ii) Respecto al eje $\pi/2$. Para $n = 2$, es decir, reemplazando $(r; \theta)$ por $(-r; 2\pi - \theta)$, se tiene

$$r^2 = 9 \left[\sin \left(\frac{2\pi - \theta}{2} \right) + 1 \right] \Rightarrow r^2 = 9 \left[\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + 1 \right]$$

Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje $\pi/2$.

iii) Respecto al polo. La ecuación no varía al reemplazar $(r; \theta)$ por $(-r; \theta)$ (para $n = 0$). Luego, la curva es simétrica respecto al polo y su gráfica se muestra en la Fig. 5.11.

- c) El cardioide $r = 3(1 + \cos \theta)$ es simétrico con respecto al eje polar. No es simétrico respecto al eje $\pi/2$ ni respecto al polo (verificar).
La gráfica del cardioide $r = 3(1 + \cos \theta)$ se muestra en la Fig. 5.12.

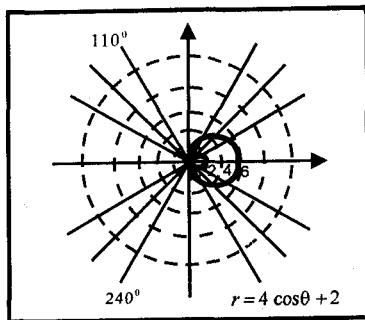


Fig. 5.10

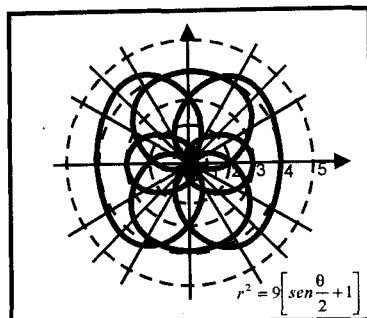


Fig. 5.11

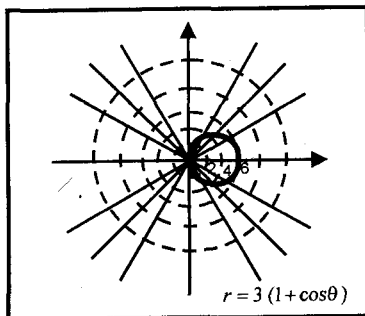


Fig. 5.12

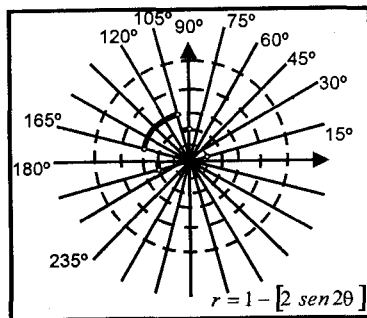


Fig. 5.13

Ejemplo 7. Discutir y graficar la ecuación $r = 4 \cos \theta + 2$ (caracol).

Solución

Por la periodicidad del coseno, es suficiente considerar $\theta \in [0; 2\pi]$.

I. Intersecciones

- a) Con el eje polar. Reemplazamos $\theta = n\pi$ en la ecuación y se tiene

$$r = 4 \cos(n\pi) + 2.$$

$$\text{Si } n \text{ es par} \Rightarrow r = 6 \Rightarrow (6; 0)$$

$$\text{Si } n \text{ es impar} \Rightarrow r = -2 \Rightarrow (-2; \pi)$$

- b) Con el eje $\pi/2$. Reemplazamos $\theta = (\pi/2 + n\pi)$ en la ecuación y obtenemos

$$r = 4 \cos(\pi/2 + n\pi) + 2$$

$$\text{Si } n \text{ es par} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow (2; \pi/2)$$

$$\text{Si } n \text{ es impar} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow (2; 3\pi/2)$$

c) Con el polo. Haciendo $r = 0$ en la ecuación, se obtiene $0 = 4 \cos \theta + 2$ ó $\cos \theta = -1/2$. Luego, $\theta = 2\pi/3$ v $\theta = 4\pi/3$. La curva pasa por el polo.

II. **Simetrías.** En el ejemplo 6 hemos visto que este caracol es simétrico solamente respecto al eje polar.

III. **Extensión.** $\theta \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq r \leq 6$.

IV. Tabulación

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	6	5,5	4,8	4	2	0	-0,8	-1,5	-2

V. **Trazado de la gráfica.** La gráfica se muestra en la figura 5.10.

Ejemplo 8. Discutir y graficar la ecuación $r^2 = 9 \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1 \right]$.

Solución

Procedemos de manera similar a lo realizado en el ejemplo anterior.

I. Intersecciones

a) Con el eje polar. $\theta = n\pi \Rightarrow r^2 = 9[\sin(n\pi/2) + 1]$.

Si $n = 0 \Rightarrow (3; 0)$ y $(-3; 0)$.

Si $n = 1 \Rightarrow (4, 2; \pi)$ y $(-4, 2; \pi)$.

Si $n = -1 \Rightarrow (0; -\pi)$.

b) Con el eje $\frac{\pi}{2}$. $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow r^2 = 9 \left[\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + n\pi}{2}\right) + 1 \right]$.

Si $n = 0 \Rightarrow (3, 9; \pi/2)$ y $(-3, 9; \pi/2)$.

Si $n = 2 \Rightarrow (1, 6; 5\pi/2)$ y $(-1, 6; 5\pi/2)$.

c) Con el polo. $r = 0 \Rightarrow \theta = 3\pi$, $\theta = 7\pi$.

II. **Simetrías.** La curva es simétrica con respecto al eje polar, al eje $\pi/2$ y al origen (ver ejemplo 6).

III. **Extensión.** $\theta \in \mathbb{R}$ y $-3\sqrt{2} \leq r \leq 3\sqrt{2}$.

IV. **Tabulación** (Ejercicio para el lector. Considerar que el período de la función es 4π)

V. **Trazado de la gráfica.** La gráfica se muestra en la figura 5.11.

Ejemplo 9. Trace la gráfica de $r = 1 - \llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket$, $\theta \in [0; \pi]$.

Solución

Dividimos convenientemente el intervalo $[0; \pi]$ de modo que $\llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket$ tome un solo valor entero en el subintervalo considerado.

$$\text{Si } \theta \in [0; \pi/12) \Rightarrow 0 \leq 2 \sin 2\theta < 1 \Rightarrow \llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket = 0 \Rightarrow r = 1.$$

$$\text{Si } \theta \in [\pi/12; \pi/4) \Rightarrow 1 \leq 2 \sin 2\theta < 2 \Rightarrow \llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket = 1 \Rightarrow r = 0.$$

$$\text{Si } \theta = \pi/4 \Rightarrow 2 \sin 2\theta = 2 \Rightarrow \llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket = 2 \Rightarrow r = -1.$$

$$\text{Si } \theta \in (\pi/4; 5\pi/12] \Rightarrow 1 \leq 2 \sin 2\theta < 2 \Rightarrow \llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket = 1 \Rightarrow r = 0.$$

$$\text{Si } \theta \in (5\pi/12; \pi/2] \Rightarrow 0 \leq 2 \sin 2\theta < 1 \Rightarrow \llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket = 0 \Rightarrow r = 1.$$

$$\text{Si } \theta \in (\pi/2; 7\pi/12] \Rightarrow -1 \leq 2 \sin 2\theta < 0 \Rightarrow \llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket = -1 \Rightarrow r = 2.$$

$$\text{Si } \theta \in (7\pi/12; 11\pi/12) \Rightarrow -2 \leq 2 \sin 2\theta < -1 \Rightarrow \llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket = -2 \Rightarrow r = 3.$$

$$\text{Si } \theta \in [11\pi/12; \pi) \Rightarrow -1 \leq 2 \sin 2\theta < 0 \Rightarrow \llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket = -1 \Rightarrow r = 2.$$

$$\text{Si } \theta = \pi \Rightarrow 2 \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \llbracket 2 \sin 2\theta \rrbracket = 0 \Rightarrow r = 1.$$

La gráfica se muestra en la Fig. 5.13.

5.7 INTERSECCIÓN DE CURVAS EN COORDENADAS POLARES

Proposición 1. Si $r = f(\theta)$ es la ecuación de una curva en coordenadas polares, entonces

$$(-1)^n r = f(\theta + n\pi), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (13)$$

es también la ecuación de dicha curva.

Considerando esta proposición, para hallar la intersección de dos curvas cuyas ecuaciones en coordenadas polares son

$$r = f(\theta) \text{ y } r = g(\theta)$$

se siguen los siguientes pasos:

1. Se obtienen todas las ecuaciones distintas de las dos curvas aplicando (13) a cada una de ellas.

$$r = f(\theta), \quad r = f_1(\theta), \quad r = f_2(\theta), \quad \dots$$

$$r = g(\theta), \quad r = g_1(\theta), \quad r = g_2(\theta), \quad \dots$$

2. Se resuelven, para r y para θ , las ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} r = f(\theta) \\ r = g(\theta) \end{cases}, \quad \begin{cases} r = f_1(\theta) \\ r = g_1(\theta) \end{cases}, \quad \begin{cases} r = f(\theta) \\ r = g_1(\theta) \end{cases}, \quad \text{etc.}$$

3. Se verifica si el polo es un punto de intersección haciendo $r = 0$ en cada ecuación para determinar si existe solución para θ (no necesariamente la solución será la misma).

Para tener una idea respecto a la cantidad de puntos de intersección de dos curvas, se sugiere trazar sus gráficas previamente de modo que se simplifique el trabajo.

Ejemplo 10. Halle las diferentes ecuaciones de las curvas

a) $r = 2 + \cos 2\theta$

b) $r = 2 + \sin \theta$

Solución

- a) Aplicando (13), las ecuaciones de $r = 2 + \cos 2\theta$ están dadas por

$$(-1)^n r = 2 + \cos 2(\theta + n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si n es par $\Rightarrow r = 2 + \cos 2\theta$. Si n es impar $\Rightarrow -r = 2 + \cos 2\theta$.

Luego, las diferentes ecuaciones de la curva son:

$$r = 2 + \cos 2\theta \quad \text{y} \quad r = -2 - \cos 2\theta$$

- b) De manera similar, las ecuaciones de $r = 2 + \sin \theta$ están dadas por

$$(-1)^n r = 2 + \sin(\theta + n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si n es par $\Rightarrow r = 2 + \sin \theta$. Si n es impar $\Rightarrow -r = 2 - \sin \theta$.

Luego, las diferentes ecuaciones de la curva son:

$$r = 2 + \sin \theta \quad \text{y} \quad r = -2 + \sin \theta$$

Ejemplo 11. Halle los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones en coordenadas polares son $\sqrt{2}r = 3$ y $r^2 = -9 \cos 2\theta$.

Solución

Las gráficas de estas curvas se muestran en la Fig. 5.14. Considerando las simetrías de estas curvas (respecto al eje polar, al eje $\pi/2$ y al polo), es suficiente hallar un punto de intersección.

Al resolver simultáneamente sus ecuaciones, se obtiene

$$\frac{9}{2} = -9 \cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Luego, los puntos de intersección son:

$$A\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{3}\right), \quad B\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$C\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{4\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad D\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{5\pi}{3}\right)$$

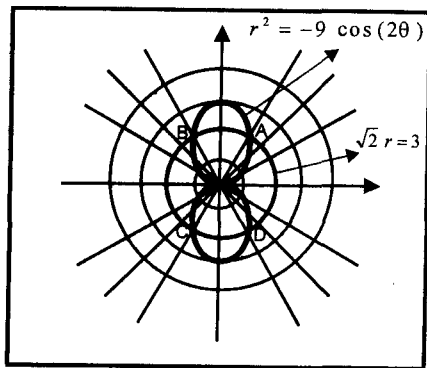


Fig. 5.14

Ejemplo 12. Halle los puntos de intersección de las curvas

$$r = 2 \cos \theta \text{ y } r = 2 \sin \theta$$

Solución

Las gráficas de estas curvas (circunferencias) se muestran en la figura 5.15. Es evidente que el polo es un punto de la intersección (en $r = 2 \cos \theta$ para $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = 0$; en $r = 2 \sin \theta$ para $\theta = 0 \Rightarrow r = 0$).

No es necesario hallar las diferentes ecuaciones de las dos curvas, ya que al resolver simultáneamente sus ecuaciones se obtiene

$$2 \cos \theta = 2 \sin \theta \Rightarrow \tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Luego, los puntos de intersección son $P(\sqrt{2}; \pi/4)$ y el polo.

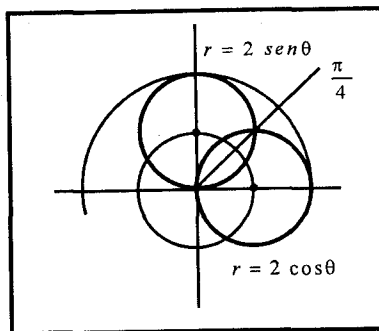


Fig. 5.15

Ejemplo 13. Halle los puntos de intersección de las curvas

$$r = 4(1 + \sin \theta) \text{ y } r(1 - \sin \theta) = 3$$

Solución

Las gráficas de $r = 4(1 + \sin \theta)$ (cardioide) y $r(1 - \sin \theta) = 3$ (parábola) se muestran en la Fig. 5.16. Se observa que el polo no pertenece a la intersección.

No es necesario hallar las otras ecuaciones de estas curvas, pues al resolver simultáneamente sus ecuaciones se obtienen los cuatro puntos que se observan en el gráfico. En efecto,

$$4(1 + \sin \theta) = 3/(1 - \sin \theta) \Rightarrow 4 \cos^2 \theta = 3 \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{3}/2$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6}, \theta = \frac{7\pi}{6}, \theta = \frac{11\pi}{6}$$

Luego, los puntos de intersección son

$$A(6; \pi/6), B(6; 5\pi/6),$$

$$C(2; 7\pi/6) \text{ y } D(2; 11\pi/6)$$

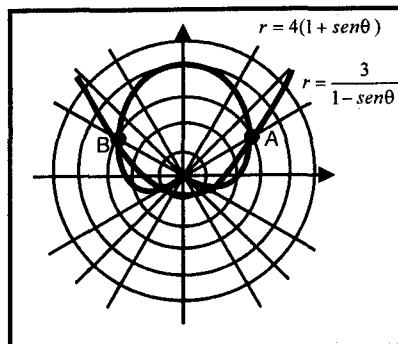


Fig. 5.16

5.8 DERIVADAS Y RECTAS TANGENTES EN COORDENADAS POLARES

Sea $r = f(\theta)$ la ecuación de una curva. De las fórmulas

$$x = r \cos \theta \wedge y = r \sin \theta \text{ se obtienen } \begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas con parámetro θ , de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}, \text{ esto es, } \frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta} \quad (14)$$

Como sabemos, esta derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(x; y)$, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha \quad (15)$$

donde α es el ángulo de inclinación de la recta tangente a la curva.

Sea $P(r; \theta)$ el punto de tangencia y β el ángulo que forma el radio vector \overline{OP} y la recta tangente. Examinaremos los siguientes casos:

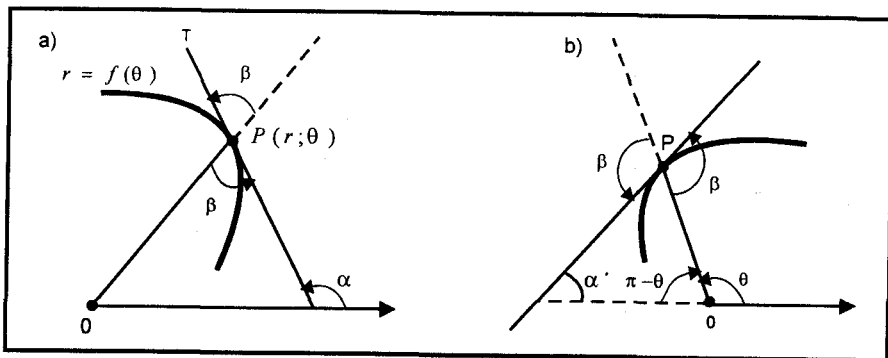


Fig. 5.17

En el caso (a): $\alpha = \theta + \beta \Rightarrow \beta = \alpha - \theta$

En el caso (b): $\beta = \alpha + \pi - \theta \Rightarrow \beta = \pi + (\alpha - \theta)$, de donde:

$$\tan \beta = \tan[\pi + (\alpha - \theta)] = \tan(\alpha - \theta)$$

Lo que significa que en ambas situaciones se verifica $\tan \beta = \tan(\alpha - \theta)$, es decir,

$$\tan \beta = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta} \quad (16)$$

Considerando (14) y (15) se obtiene

$$\tan \beta = \frac{\frac{f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta} - \tan \theta}{1 + \frac{f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta} \tan \theta}$$

Simplificando se obtiene

$$\tan \beta = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}, \text{ esto es,}$$

$$\tan \beta = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \quad \text{ó} \quad \frac{dr}{d\theta} = r \cot \beta \quad (17)$$

“La derivada del radio vector r respecto al ángulo polar θ es igual al producto de la longitud del primero por la cotangente del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva en el punto dado”.

Ejemplo 14. Halle los valores de β , α y las ecuaciones cartesiana y polar de la recta tangente a la curva $r = a(1 - \cos \theta)$ en $\theta = \pi/6$ ($a > 0$).

Solución

La gráfica de $r = a(1 - \cos \theta)$ (cardioides) se muestra en la Fig. 5.18.

$$\frac{dr}{d\theta} = a \operatorname{sen} \theta, \text{ de donde}$$

$$\tan \beta = \frac{a(1 - \cos \theta)}{a \operatorname{sen} \theta} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}$$

Luego, $\tan \beta = \tan (\theta/2)$, de donde

$$\beta = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{12}$$

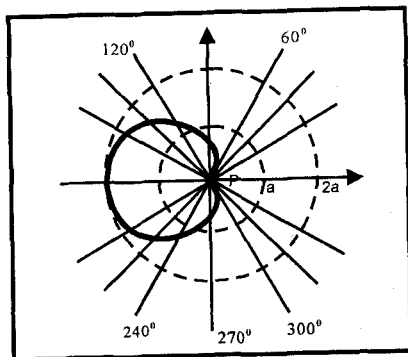


Fig. 5.18

El mismo resultado se obtiene al reemplazar $\theta = \pi/6$ en $\tan \beta = \frac{(1 - \cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta}$.

$\alpha = \theta + \beta \Rightarrow \alpha = \pi/6 + \pi/12 \Rightarrow \alpha = \pi/4$ y la pendiente de la recta tangente es

$$m_T = 1$$

Otra forma de obtener la pendiente es usando la fórmula (14)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta)\sen \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta)\sen \theta}, \text{ donde } f'(\theta) = \frac{dr}{d\theta} = a \sen \theta$$

Reemplazando $\theta = \pi/6$ en esta expresión se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = m_T = 1$$

Las coordenadas rectangulares $(x; y)$ del punto de tangencia son

$$x_0 = r \cos \theta = \frac{\sqrt{3} a}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), y_0 = r \sen \theta = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

La ecuación cartesiana de la recta tangente es $y - y_0 = 1(x - x_0)$, es decir,

$$x - y + \frac{5 - 3\sqrt{3}}{4} a = 0$$

y la ecuación polar de esta recta es

$$r \cos \left(\theta - \frac{7\pi}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3} - 5}{4\sqrt{2}}$$

Ejemplo 15. Halle las ecuaciones cartesiana y polar de la recta tangente a la curva $r^2 = 9 \cos 2\theta$ en el punto $P(3\sqrt{2}/2; \pi/6)$.

Solución

Como $r^2 = 9 \cos 2\theta$, derivando implícitamente se obtiene:

$$r' = -\frac{9 \sen 2\theta}{r}$$

Luego,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \sen \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sen \theta}$$

Reemplazando

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \theta = \frac{\pi}{6} \text{ y } r' = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 0 = m_T$$

Las coordenadas cartesianas de P son $x = 3\sqrt{6}/4$, $y = 3\sqrt{2}/4$. Por tanto, la ecuación cartesiana de la recta tangente es $y = 3\sqrt{2}/4$.

La ecuación polar de esta recta es $r \sen \theta = 3\sqrt{2}/4$.

En la fig. 5.19 se muestra la gráfica de $r^2 = 9 \cos 2\theta$ (lemniscata de Bernoulli).

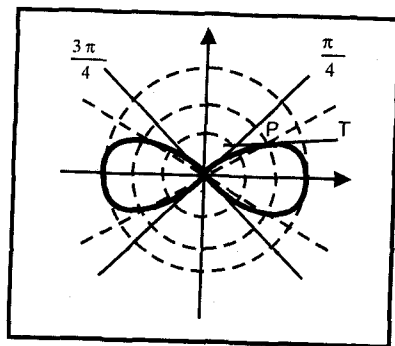


Fig. 5.19

5.9 ÁNGULO ENTRE DOS CURVAS EN COORDENADAS POLARES

Sean C y C' dos curvas que se intersecan en el punto P . Si T y T' son, respectivamente, las rectas tangentes a las curvas en el punto P , el ángulo entre las dos curvas en el punto P es el ángulo formado por las tangentes T y T' .

Si las ecuaciones de las curvas C y C' están en coordenadas polares y β y β' son, respectivamente, los ángulos que forman el eje polar y las rectas tangentes T y T' (Fig. 5.20), entonces:

$$\angle TPT' = \angle OPT' - \angle OPT, \text{ es decir, } \phi = \beta' - \beta$$

Luego,

$$\tan \phi = \frac{\tan \beta' - \tan \beta}{1 + \tan \beta' \tan \beta} \quad (18)$$

($\tan \beta'$ y $\tan \beta$ se calculan aplicando (17) en el punto de intersección de las curvas)

Observación 4. Como la discusión del ángulo puede presentar dificultades, se calcula el ángulo agudo entre las tangentes a las curvas considerando $|\tan \phi|$. En todo caso, la interpretación gráfica del problema simplifica los cálculos.

Ejemplo 16. Halle el ángulo de intersección entre las curvas $4r \cos \theta = 3$ y $r = 3 \cos \theta$.

Solución

De la gráfica de las dos curvas (fig. 5.21), se obtiene $\phi = \beta' - \beta$.

Para hallar los puntos de intersección resolvemos simultáneamente sus ecuaciones y obtenemos

$$\begin{aligned} 3 \cos \theta &= \frac{3}{4 \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \theta &= \frac{\pi}{6} \vee \theta = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Los puntos de intersección son

$P(3/2; \pi/6)$ y $Q(3/2; 5\pi/6)$.

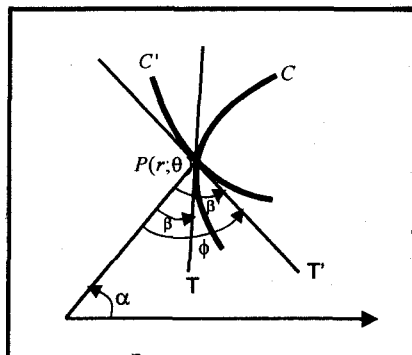


Fig. 5.20

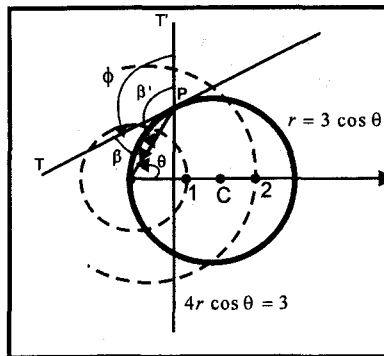


Fig. 5.21

Solamente hallaremos el ángulo entre las dos curvas en el punto P (se deja como ejercicio al lector el ángulo en el punto Q).

$$i) r = \frac{3}{4 \cos \theta} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{3 \operatorname{sen} \theta}{4 \cos^2 \theta} \text{ y } \tan \beta' = \cot \theta$$

$$ii) r = 3 \cos \theta \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -3 \operatorname{sen} \theta \text{ y } \tan \beta = -3 \cot \theta$$

Por la dirección de los ángulos y aplicando (18), se tiene:

$$\tan \phi = \frac{\tan \beta - \tan \beta'}{1 + \tan \beta \tan \beta'} \Rightarrow \tan \phi = \frac{-\cot \theta - \cot \theta}{1 - \cot^2 \theta}$$

Para $\theta = \pi/6 \Rightarrow \tan \phi = -\sqrt{3}$. Finalmente, $\phi = 2\pi/3$.

EJERCICIOS

I. Expresé en coordenadas polares los siguientes puntos dados en coordenadas rectangulares.

1) $P(3/2; -3/2)$

2) $P(1; -\sqrt{3})$

3) $(-\sqrt{3}; 1)$

4) $P(\sqrt{8}; \sqrt{2})$

5) $P(-8; 8)$

6) $(4; 4\sqrt{3})$

II. Expresé en coordenadas rectangulares los siguientes puntos dados en coordenadas polares.

1) $P(3; 3\pi/4)$

2) $P(-2; \pi)$

3) $P(4; -2\pi/3)$

4) $P(-2; -5\pi/12)$

5) $P(-1/2; -\pi/4)$

6) $P(3; 2)$

III. Halle las ecuaciones polares de:

1. $y - 5 = 0$

R. $r \operatorname{sen} \theta = 5$

2. $x^2 - x^2 y^2 - y^4 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

R. $r = 2(2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)$

4. $6xy = 5$

R. $3r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 5$

5. $y^2 = x^3/(2a - x)$

R. $2a \tan \theta \operatorname{sen} \theta = r$

6. $x^2 + y^2 - 2y = 0$

R. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

7. $3(x - 2)^2 + 4y^2 = 16$

R. $r(2 - \cos \theta) = 6$

8. $y^2 - 4x - 4 = 0$

R. $r(1 - \cos \theta) = 2$

9. $3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$ R. $r^2(3 + \sin^2 \theta) = 3(2r \cos \theta - 3)$
 10. $2xy = a^2$ R. $r^2 \sin 2\theta = a^2$
 11. $x^2 - y^2 = a^2$ R. $r^2 \cos 2\theta = a^2$

IV. Halle las ecuaciones rectangulares de

- | | |
|----------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. $r = a \sin \theta - b \cos \theta$ | R. $x^2 + y^2 + bx - ay = 0$ |
| 2. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ | R. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ |
| 3. $r(1 - \cos \theta) = 4$ | R. $y^2 = 8(x + 2)$ |
| 4. $r(2 - \cos \theta) = 3$ | R. $3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$ |
| 5. $r(1 - 2 \cos \theta) = 4$ | R. $3x^2 - y^2 + 16x + 16 = 0$ |
| 6. $r = a(1 - \cos \theta)$ | R. $(x^2 + y^2 - ax) = a^2(x^2 + y^2)$ |
| 7. $r^2 \cos 2\theta = 3$ | R. $x^2 - y^2 = 3$ |
| 8. $r = 2 \cos 2\theta$ | R. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ |
| 9. $r \sin 2\theta = 4$ | R. $x^2 y^2 = 4(x^2 + y^2)$ |
| 10. $r = a \sec \theta + b$ | R. $(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2 x^2$ |
| 11. $r \sin^2 \theta = 4 \cos \theta$ | R. $y^2 = 4x$ |
| 12. $r = \sin 2\theta$ | R. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2$ |

V. Ejercicios diversos.

1. Demuestre que el área del triángulo de vértices $(r_1; \theta_1)$, $(r_2; \theta_2)$, $(r_3; \theta_3)$ está dada por

$$\frac{1}{2} r_1 r_2 r_3 \left[\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{r_3} + \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{r_1} + \frac{\sin(\theta_1 - \theta_3)}{r_2} \right]$$

2. Halle la longitud de los lados y el área del triángulo de vértices

a) $(1; \pi/3)$, $(2; \pi/6)$ y $(3; -\pi/6)$

R. $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\frac{1}{2}(3\sqrt{3} - 2)$

b) $(2; \pi/8)$, $(4; 3\pi/8)$ y $(-1; 7\pi/8)$

R. $2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$, $\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$, $\sqrt{17}$, $\frac{1}{2}(5\sqrt{2} - 4)$

3. Demuestre que el ángulo entre las rectas:

$$r \cos(\theta - \omega) = p \text{ y } r \cos(\theta - \omega') = p' \text{ es } \omega - \omega'.$$

4. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(r_1; \theta_1)$ y $B(r_2; \theta_2)$. Sugerencia: considere un punto $P(r; \theta)$ cualquiera de las rectas y las áreas de los triángulos OAB , OBP y OPA .

$$R. \frac{\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{r} + \frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta)}{r_1} + \frac{\text{sen}(\theta - \theta_1)}{r_2} = 0$$

5. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(r_1; \theta_1)$ y es perpendicular a la recta $r \cos(\theta - \omega) = p$.

$$R. r \text{sen}(\theta - \omega) = r_1 \text{sen}(\theta_1 - \omega)$$

6. Si $C(a; \alpha)$ es el centro de una circunferencia de radio a expresado en coordenadas polares, demuestre que $r = 2a \cos(\theta - \alpha)$ es la ecuación de la circunferencia que pasa por el polo.

7. P es cualquier punto de la circunferencia $r^2 - 2rc \cos(\theta - \alpha) + c^2 - a^2 = 0$. Si O es el polo y Q un punto sobre \overline{OP} de manera que:

$$\text{i) } \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = k$$

$$\text{ii) } \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = d^2$$

Halle la ecuación del lugar geométrico descrito por Q en cada caso.

$$R. \text{ i) } k^2 r^2 - 2ckr \cos(\theta - \alpha) + c^2 - a^2 = 0$$

$$\text{ii) } (c^2 - a^2)r^2 - 2cd^2r \cos(\theta - \alpha) + d^4 = 0$$

8. Si el foco de una cónica (parábola, elipse o hipérbola) está en el polo y la directriz de la cónica es una recta perpendicular al eje polar que está a una distancia de $2p$ ($p > 0$), la ecuación de la cónica está dada por:

$$r = \frac{2ep}{1 \pm e \cos \theta}, \text{ } e \text{ es la excentricidad de la cónica} \quad (19)$$

(la cónica es una elipse si $0 < e < 1$, una parábola si $e = 1$ y una hipérbola si $e > 1$). Si la directriz está a la izquierda del polo, el signo de (19) es $-$; en cambio, si la directriz está a la derecha del polo, el signo de (19) es $+$.

Si el foco se mantiene en el polo y la directriz es paralela al eje polar, la ecuación de la cónica está dada por

$$r = \frac{2ep}{1 \pm e \text{sen } \theta} \quad (20)$$

Si la directriz está debajo del eje polar, el signo de (20) es $-$ y si la directriz está sobre el eje polar, el signo es $+$.

- a) Halle la ecuación de la elipse con foco en el polo, excentricidad $e = \frac{1}{2}$ y directriz perpendicular al eje polar en el punto $(-4; 0)$.

$$R. r = \frac{4}{2 - \cos \theta}$$

- b) Halle la ecuación de la parábola con foco en el polo y directriz perpendicular al eje polar en el punto $(-3; 0)$.

$$R. r = \frac{3}{1 - \cos \theta}$$

- c) Describa y grafique la curva $r = \frac{16}{5 + 3 \sin \theta}$.

R. elipse

VI. Trace la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes.

1. $r = 5 \sin \theta + 4 \cos \theta$

2. $r \sin \theta = 4$

3. $r \cos \theta = 6$

4. $r^2 \sin 2\theta = 16$

5. $r^2 = 16 \sin 2\theta$

6. $r(2 - \cos \theta) = 4$

7. $r(1 + \sin \theta) = 8$

8. $r(1 - 2 \cos \theta) = 4$, hipérbola

9. $r^2 \cos^3 \theta = a \sin \theta$

10. $r = 2a \tan \theta \sin \theta$, cisoide

11. $r = a \sin^2 \frac{\theta}{2}$

12. $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$

13. $r = a \theta$, espiral de Arquímedes

14. $r = e^{a\theta}$, espiral logarítmica

15. $r = a(1 + \cos \theta)$, cardioide

16. $r = a(1 - \cos \theta)$, cardioide

17. $r^2 = a^2 \sin 2\theta$, lemniscata

18. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, lemniscata

19. $r = 4 \cos 3\theta$, rosa de 3 pétalos

20. $r^2 - 4r + 3 + 2 \cos \theta = 0$

21. $r = a \sin 3\theta$, rosa de 3 pétalos

22. $r = a \sin 2\theta$, rosa de 4 pétalos

23. $r = a \cos 2\theta$, rosa de 4 pétalos

24. $r = a \sin 4\theta$, rosa de 8 pétalos

25. $r = a \cos 4\theta$, rosa de 8 pétalos

26. $r = a \sin 5\theta$, rosa de 5 pétalos

27. $r = a \cos 5\theta$, rosa de 5 pétalos

28. $r = a(2 + \cos \theta)$, caracol de Pascal.

29. $r = a(1 - 2 \cos \theta)$, caracol de Pascal

30. $r = [2 + 3 \sin 2\theta]$

31. $|r| = 3 \cos 2\theta$, $\theta \in [0; \pi]$

32. $|r| = -3 \cos 2\theta$, $\theta \in [0; \pi]$

VII. Ejercicios sobre simetrías.

- Determine la condición para que una curva sea simétrica con respecto al eje $\pi/4$.
- Determine la condición para que una curva sea simétrica con respecto al eje $\pi/3$.

VIII. Halle los puntos de intersección de los siguientes pares de curvas

1. $r \sin \theta = 2a$, $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = a$

R. $\left(2a; \frac{\pi}{2}\right)$

2. $r = 2 \csc \theta$, $r = 4 \sin \theta$

R. $\left(2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right); \left(2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$

3. $r = a$, $r = 2a \cos 2\theta$

4. $r = a(1 - \cos \theta)$, $r = a \cos \theta$

R. $\left(\frac{a}{2}; \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{a}{2}; -\frac{\pi}{3}\right)$ y el polo

5. $3r = 4 \cos \theta$, $r(1 + \cos \theta) = 1$

R. $(2/3; \pm\pi/3)$

6. $r = 4 \tan \theta \sin \theta$, $r = 4 \cos \theta$

7. $r^2 \sin 2\theta = 8$, $r \cos \theta = 2$

8. $r = 1 + \cos \theta$, $2r = 3$

9. $r = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2}$, $r = 2$

10. $3r = 4 \cos \theta$, $r \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$

11. $r = 1 + \cos \theta$, $2r(1 - \cos \theta) = 1$

12. $r \cos \theta = 4$, $r = 10 \sin \theta$

13. $r = a(1 + \sin \theta)$, $r = a(1 - \sin \theta)$

14. $r = 3 + \cos 4\theta$, $r = 2 - \cos 4\theta$

15. $r = 2 + \cos 2\theta$, $r = 2 + \sin \theta$

IX. Halle los ángulos β , α y la pendiente de la recta tangente para las siguientes curvas en los puntos dados. Trace la gráfica de la curva.

1. $r = 4(1 + \sen \theta)$; $P(4; 0)$

R. $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

2. $r^2 = a^2(\cos 2\theta)$; $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{\pi}{6}\right)$

R. $\beta = \frac{5\pi}{6}$

3. $r(1 + \sen \theta) = 4$; $P_1\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$, $P_2(4; \pi)$

4. $r = 4 \sen 3\theta$; $P(4; \frac{\pi}{6})$

5. $r = a \sen \theta$; $\theta = \frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$

6. $r = a \sen 2\theta$; $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a; \frac{\pi}{6}\right)$, $P_2\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

7. $r(1 - \sen \theta)$; $P(a; \pi)$

8. $r = a \sec^2 \theta$; $P(2a; \frac{\pi}{4})$

X. Halle el ángulo de intersección entre las curvas siguientes en los puntos que se indican.

1. $r = a \cos \theta$, $r = a \sen \theta$; en $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a; \frac{\pi}{4}\right)$

R. $\frac{\pi}{2}$

2. $r = 4 \cos \theta$, $r = 4 \cos^2 \theta - 3$; en $P\left(-2; \frac{2\pi}{3}\right)$

R. $\frac{\pi}{2}$

3. $r = a$, $r = 2a \sen a$; en $P(a; \frac{\pi}{6})$

4. $r = -a \sen \theta$, $r = \cos \theta$; en el polo

XI. Halle los ángulos de intersección de las curvas siguientes:

1. $2r = 3$, $r = a + \cos \theta$

R. $\pi/6$

2. $3r = 10$, $r(2 - \sen \theta) = 5$

R. $\pi/3$

3. $r = 1 - \sen \theta$, $r = 1 + \sen \theta$

R. 0° en el polo, $\pi/2$ en $(1; \pi)$; $\frac{3\pi}{2}$ en $(1; 0)$

4. $r = \cos \theta$, $r = \sin 2\theta$

R. 0° en $(0; \pi/2)$; $79^\circ 6'$ aprox. en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{6}\right)$ y en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{5\pi}{6}\right)$

5. $r^2 \sin 2\theta = 4$, $r^2 = 16 \sin 2\theta$

R. $\pi/3$

6. $r(1 - \cos \theta) = 4$, $r(2 + \cos \theta) = 20$

7. $r = 3(1 - \cos \theta)$, $r = 3 \cos \theta$

8. $r = a \cos \theta$, $r = -a \sin 2\theta$

R. 0° en el polo, $\arctan 3\sqrt{3}$ en los otros puntos

9. $r = \sec \theta$, $r \sin 2\theta = 2$

R. Las curvas no se cortan

XII. En los ejercicios del 1 al 4, demuestre que las siguientes curvas se cortan en ángulo recto.

1. $r(1 + \cos \theta) = a$, $r(1 - \cos \theta) = b$

2. $r = a(1 + \cos \theta)$, $r = a(1 - \cos \theta)$

3. $r = 2a \cos \theta$, $r = 2b \sin \theta$

4. $r = 4 \cos(\theta - \pi/3)$, $r^2 - 6r \cos \theta + 6 = 0$

5. Halle la condición para que las circunferencias

$$r^2 - 2cr \cos(\theta - \alpha) + c^2 - a^2 = 0 \quad y$$

$$r^2 + 2c'r \cos(\theta - \alpha') + c'^2 - a'^2 = 0$$

se corten ortogonalmente.

$$R. c^2 + c'^2 - 2cc' \cos(\alpha - \alpha') = a^2 + a'^2$$

6. Demuestre que $r \cos(\theta - \omega) = a + c \cos(\alpha - \omega)$ es tangente a la circunferencia $r^2 - 2cr \cos(\theta - \alpha) + c^2 - a^2 = 0$.

7. Halle las coordenadas polares de los centros y los radios de las circunferencias

$$r = 4 \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad y \quad r^2 - 2r \cos \theta - 2 = 0$$

Pruebe además que las circunferencias se cortan ortogonalmente (dos circunferencias se cortan ortogonalmente si la suma de los cuadrados de sus radios es igual al cuadrado de la distancia entre sus centros).

5.10 ÁREAS EN COORDENADAS POLARES

En esta sección deduciremos una fórmula que permita obtener el área de una región F (Fig. 5.22) limitada por una ecuación polar, esto es,

$$F = \{(r; \theta) \in \mathbb{R}^2 / \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq f(\theta)\}$$

donde $f: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y no negativa.

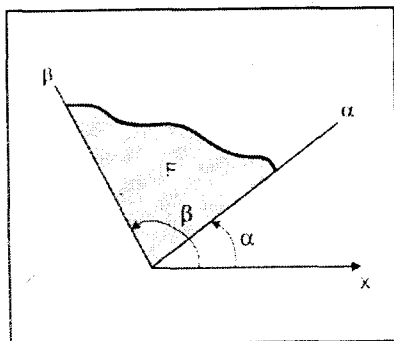


Fig. 5.22

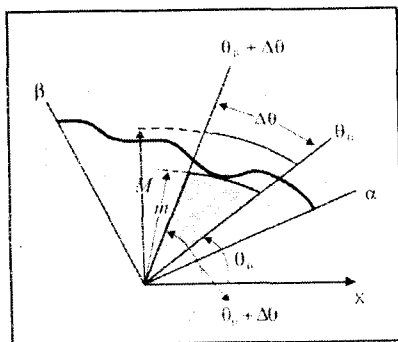


Fig. 5.23

En términos simples, F es la región comprendida entre las gráficas de

$$r = f(\theta), \text{ eje } \alpha, \text{ eje } \beta \text{ (con } \alpha < \beta \text{)}$$

Sea $\theta_0 \in [\alpha; \beta]$ y sea $A(\theta_0)$ el área del sector limitado por la curva $r = f(\theta)$ y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \theta_0$. Sea $\theta_0 + \Delta\theta \in [\alpha; \beta]$, con $\Delta\theta > 0$, y

$$m = \min_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \Delta\theta} f(\theta) \quad \wedge \quad M = \max_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \Delta\theta} f(\theta)$$

El área $A(\theta_0 + \Delta\theta) - A(\theta_0)$ está comprendida entre las áreas de los sectores circulares de radios m y M (Fig. 5.23). Para $\Delta\theta > 0$ se tiene

$$\frac{m^2 \Delta\theta}{2} \leq A(\theta_0 + \Delta\theta) - A(\theta_0) \leq \frac{M^2 \Delta\theta}{2}$$

Luego,

$$\frac{m^2}{2} \leq \frac{A(\theta_0 + \Delta\theta) - A(\theta_0)}{\Delta\theta} \leq \frac{M^2}{2}$$

Como $f^2/2$ es continua en $[\theta_0; \theta_0 + \Delta\theta]$, por el teorema de los valores intermedios, existe $\theta \in [\theta_0; \theta_0 + \Delta\theta]$ tal que

$$\frac{f^2(\theta)}{2} = \frac{A(\theta_0 + \Delta\theta) - A(\theta_0)}{\Delta\theta}$$

Por la continuidad de $f^2/2$ en θ_0 , se sigue que

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0^+} \frac{A(\theta_0 + \Delta\theta) - A(\theta_0)}{\Delta\theta} = \frac{f^2(\theta_0)}{2}$$

Procediendo de modo análogo, para $\Delta\theta < 0$, se tiene

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0^-} \frac{A(\theta_0 + \Delta\theta) - A(\theta_0)}{\Delta\theta} = \frac{f^2(\theta_0)}{2}$$

Por tanto,

$$A'(\theta) = \frac{f^2(\theta)}{2}, \quad \forall \theta \in [\alpha, \beta] \quad (*)$$

Por consiguiente, de (*) se deduce que la fórmula para hallar el área de la región F expresada en coordenadas polares es

$$A(F) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta$$

Observación 5. Sean $f, g: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[\alpha, \beta]$ tales que $0 \leq g(\theta) \leq f(\theta)$, $\forall \theta \in [\alpha; \beta]$, y sea F la región limitada por las gráficas de $r = g(\theta)$, $r = f(\theta)$ y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ (Fig. 5.24). Entonces el área de la región F está dada por

$$A(F) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f^2(\theta) - g^2(\theta)] d\theta$$

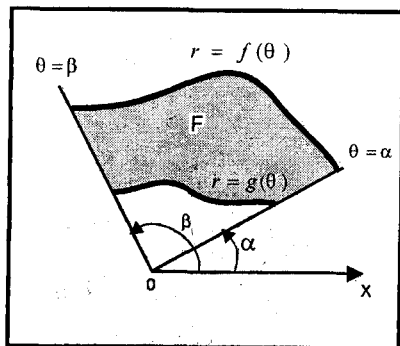


Fig. 5.24.

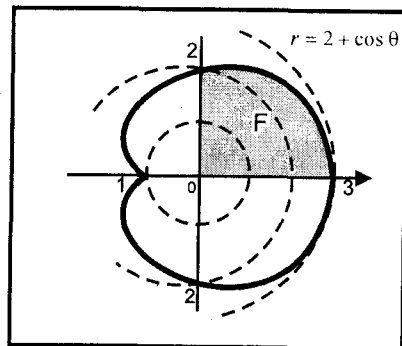


Fig. 5.25

Ejemplo 17. Calcule el área de la región F limitada por la curva $r = 2 + \cos \theta$ y los ejes $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Solución

La gráfica de la región F se muestra en la fig. 5.25.

Al aplicar la fórmula correspondiente para hallar el área, se tiene

$$\begin{aligned} A(F) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(4 + 4 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{9\pi + 16}{8} u^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 18. Calcule el área de la región limitada por la lemniscata
 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

Solución

Como la lemniscata es una curva simétrica respecto al eje polar, es suficiente multiplicar por 4 el área de la región R (Fig. 5.26). Entonces

$$A(F) = 4 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta \, d\theta \right] = (a^2)u^2$$

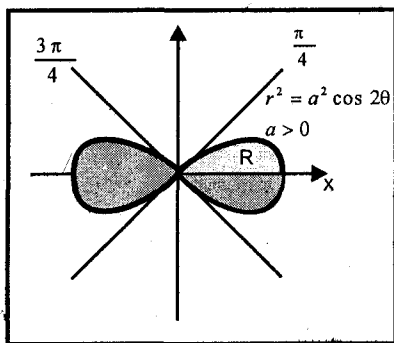


Fig. 5.26

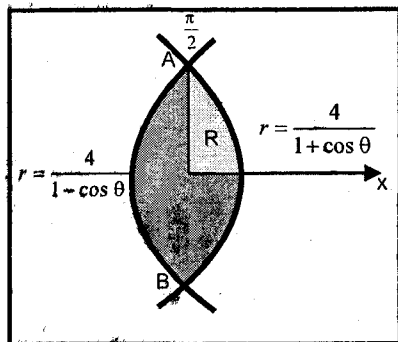


Fig. 5.27

Ejemplo 19. Halle el área de la región limitada por las parábolas
 $r(1 + \cos \theta) = 4$ y $r(1 - \cos \theta) = 4$.

Solución

En este caso, una parábola es simétrica a la otra parábola con respecto al eje $\pi/2$ (al reemplazar θ por $\pi - \theta$ en la primera ecuación, se obtiene la segunda ecuación). Estas parábolas son simétricas con respecto al eje polar y sus puntos de intersección son los puntos $A(4; \pi/2)$ y $B(4; 3\pi/2)$. Considerando las simetrías, el área de la región entre estas parábolas (Fig. 5.27) es 4 veces el área de la región R. En la integral se utilizará la identidad $(1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \theta/2)$.

$$A(F) = 4 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16 \, d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} \right] = 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[2 \cos^2 \theta/2]^2} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \frac{\theta}{2} \, d\theta = \frac{64}{3} u^2$$

Ejemplo 20. Calcule el área de la región que es interior a la curva $r = 2a \cos 3\theta$ y exterior a la circunferencia $r = a$, $a > 0$.

Solución

La región se muestra en la Fig. 5.28 (parte sombreada). Para hallar el área total es suficiente multiplicar por 6 el área de la región R. Entonces

$$A(F) = 6 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{9}} (4a^2 \cos^2 3\theta - a^2) d\theta \right] = 3a^2 \left[\theta + \frac{1}{3} \sin 6\theta \right]_0^{\frac{\pi}{9}} = \frac{a^2}{6} (2\pi + 3\sqrt{3}) u^2$$

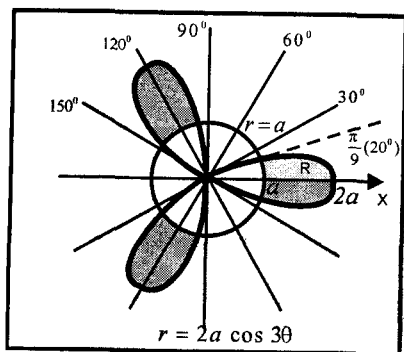


Fig. 5.28

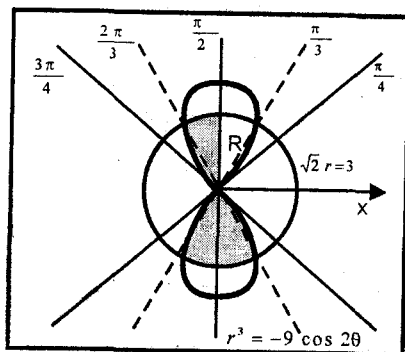


Fig. 5.29

Ejemplo 21. Calcule el área de la región que es interior a las curvas $\sqrt{2} r = 3$ y $r^2 = -9 \cos 2\theta$

Solución

La región es la parte sombreada que se muestra en la Fig. 5.29. Por simetría se tiene

$$A(F) = 4 \left[\frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} (-9 \cos 2\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{9}{2} d\theta \right] = \frac{3}{2} (6 + \pi - 3\sqrt{3}) u^2$$

Ejemplo 22. Halle el área de la región que es interior a la curva $r = 3a \cos 2\theta$ y exterior a la curva $r = a(1 + \cos 2\theta)$, $a > 0$.

Solución

La región es la parte sombreada que se ilustra en la fig. 5.30. Por simetría, se tiene

$A(F) = 4[A(R_1) + A(R_2)]$, donde

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} [9a^2 \cos^2 2\theta - a^2 (1 + \cos 2\theta)^2] d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/6} (3 + 4 \cos 4\theta - 2 \cos 2\theta) d\theta = \frac{a^2 \pi}{4} \end{aligned}$$

$$A(R_2) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\pi/2} [9a^2 \cos^2 2\theta - a^2 (1 + \cos 2\theta)^2] d\theta$$

(donde α es tal que $\cos 2\alpha = -1/4$)

$$= \frac{a^2}{2} \int_{\alpha}^{\pi/2} [3 + 4 \cos 4\theta - 2 \cos 2\theta] d\theta = \frac{a^2}{2} \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\sqrt{15}}{8} - 3\alpha \right)$$

Luego, $A(F) = a^2 \left(4\pi + \frac{3}{4} \sqrt{15} - 6\alpha \right) u^2 \cong (9,95 a^2) u^2$.

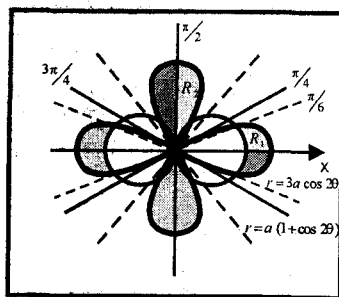


Fig. 5.30

5.11 LONGITUD DE ARCO EN COORDENADAS POLARES

Para calcular la longitud de arco de una curva expresada por la ecuación polar $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha; \beta]$, parametrizamos en términos del parámetro θ . Así, las ecuaciones paramétricas de la curva son

$$x = f(\theta) \cos \theta \quad \wedge \quad y = f(\theta) \sin \theta, \quad \theta \in [\alpha; \beta]$$

donde f es una función con derivada continua $\forall \theta \in [\alpha; \beta]$.

Al aplicar la derivada de un producto, se obtiene

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta \quad y \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta$$

Entonces

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2$$

Luego, aplicando la fórmula de longitud de arco de una curva dada en ecuaciones paramétricas, se tiene que la longitud de arco de $r = f(\theta)$ desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ está dada por

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$$

Ejemplo 23. Halle la longitud de arco de la curva $r = a \sin^3(\theta/3)$, $a > 0$.

Solución

La gráfica de la curva se muestra en la fig. 5.31. La curva queda descrita si $\theta \in [0; 3\pi]$ (es simétrica respecto al eje $\pi/2$).

Como $[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2 = a^2 \sin^6 \frac{\theta}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = a^2 \sin^4 \frac{\theta}{3}$, entonces

$$L = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^4 \frac{\theta}{3}} d\theta = \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\theta}{3} d\theta = \frac{a}{2} \int_0^{3\pi} (1 - \cos \frac{2\theta}{3}) d\theta = \frac{3a\pi}{2} u$$

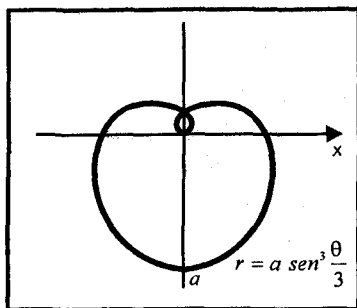


Fig. 5.31

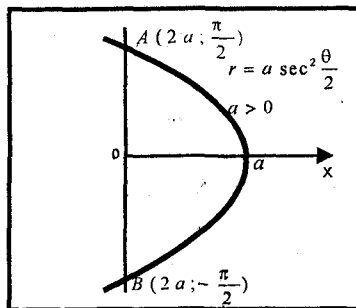


Fig. 5.32

Ejemplo 24. Halle la longitud de arco de la parte de la parábola $r = a \sec^2(\theta/2)$ cortada por la recta perpendicular que pasa por el polo.

Solución

La gráfica se muestra en la fig. 5.32. Se tiene $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ y

$$\frac{dr}{d\theta} = f'(\theta) = a \sec^2(\theta/2) \tan(\theta/2)$$

Aplicando la fórmula correspondiente, se tiene

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta = a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^3 \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= a \left[\sec \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \ln \left| \sec \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\theta}{2} \right| \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 2a[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]u \end{aligned}$$

Ejemplo 25. Halle la longitud de la curva $r = 2b \tan \theta \sec \theta$, $b > 0$, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi/3$.

Solución

La gráfica de la curva se muestra en la fig. 5.33. Con la fórmula de la derivada obtenemos

$$\frac{dr}{d\theta} = r' = 2b \sec \theta (\sec^2 \theta + 1)$$

Luego,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta \\ &= 2b \int_0^{\pi/3} \tan \theta \sqrt{\sec^2 \theta + 3} d\theta \end{aligned}$$

En la última integral hacemos el cambio de variable $u^2 = \sec^2 \theta + 3$. Entonces

$$2u du = 2 \sec^2 \theta \tan \theta d\theta \Rightarrow \tan \theta d\theta = \frac{u du}{u^2 - 3}$$

Cambiando los límites de integración, se tiene

$$\begin{aligned} L &= 2b \int_2^{\sqrt{7}} \frac{u^2 du}{u^2 - 3} = 2b \int_2^{\sqrt{7}} \left(1 + \frac{3}{u^2 - 3} \right) du = 2b \left[u + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left| \frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}} \right| \right]_2^{\sqrt{7}} \\ &= \left[2b(\sqrt{7} - 2) + \sqrt{3} b \ln \left(\frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})} \right) \right] u \end{aligned}$$

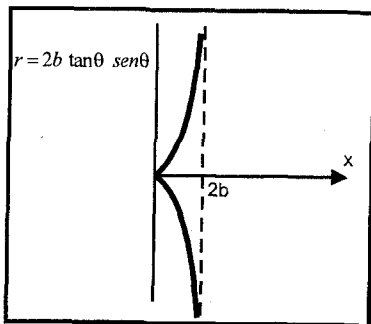


Fig. 5.33

5.12 VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN EN COORDENADAS POLARES

En primer lugar, queremos calcular el volumen de un sólido (Fig. 5.35) obtenido por la rotación alrededor del eje x de un sector circular del plano xOy (Fig. 5.34) comprendido entre los ángulos θ_1 y θ_2 .

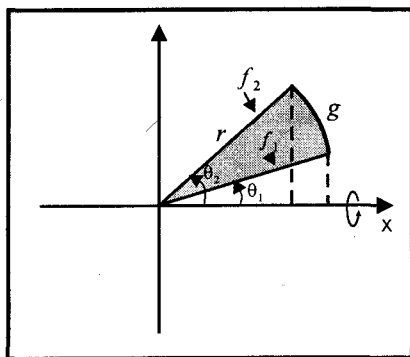


Fig. 5.34

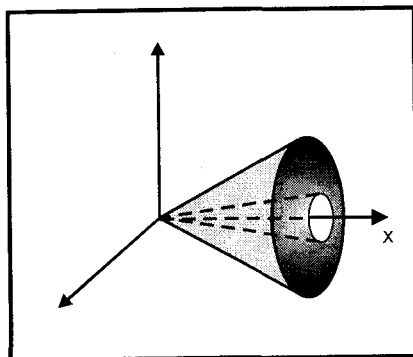


Fig. 5.35

El sector circular puede ser descrito del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq r \cos \theta_2 \text{ y } f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \\ r \cos \theta_2 \leq x \leq r \cos \theta_1 \text{ y } f_1(x) \leq y \leq g(x) \end{array} \right\} \text{ sector entre } \theta_1 \text{ y } \theta_2$$

donde

$$f_1(x) = x \tan \theta_1, \quad f_2(x) = x \tan \theta_2, \quad g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Al aplicar el método del disco, obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{r \cos \theta_2} [f_2(x)]^2 dx + \pi \int_{r \cos \theta_2}^{r \cos \theta_1} [g(x)]^2 dx - \pi \int_0^{r \cos \theta_1} [f_1(x)]^2 dx \\ &= \pi \int_0^{r \cos \theta_2} x^2 \tan^2 \theta_2 dx + \pi \int_{r \cos \theta_2}^{r \cos \theta_1} (r^2 - x^2) dx - \pi \int_0^{r \cos \theta_1} x^2 \tan^2 \theta_1 dx \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos respectivos, se tiene

$$V = \frac{2\pi r^3}{3} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (21)$$

Ahora, nuestro propósito es calcular el volumen V del sólido obtenido por la rotación en torno al eje polar de la región plana

$$F = \{(r; \theta) / 0 \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

donde $r = f(\theta)$ es la ecuación de una curva en coordenadas polares (f es continua en $[\alpha; \beta]$) y F es la región limitada por las gráficas de la curva $r = f(\theta)$ y los ejes $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ (Fig. 5.36).

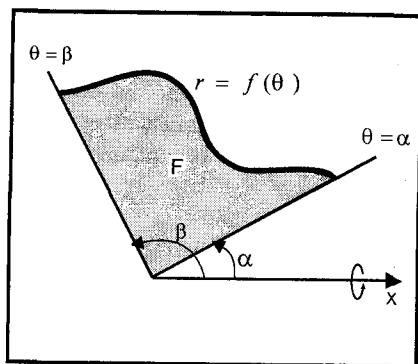


Fig. 5.36

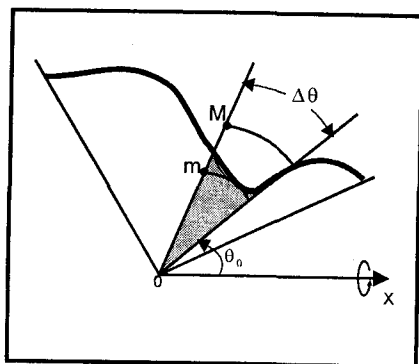


Fig. 5.37

Sean θ_0 y $\theta_0 + \Delta\theta$ dos puntos de $[\alpha; \beta]$, con $\Delta\theta > 0$, y

$$m = \min_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \Delta\theta} f(\theta) \quad \wedge \quad M = \max_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \Delta\theta} f(\theta)$$

El volumen obtenido por rotación del sector F comprendido entre θ_0 y $\theta_0 + \Delta\theta$ (Fig. 5.37) es, según la fórmula (21),

$$\frac{2\pi m^3}{3} [\cos \theta_0 - \cos (\theta_0 + \Delta\theta)] \leq V(\theta_0 + \Delta\theta) - V(\theta_0) \leq \frac{2\pi M^3}{3} [\cos \theta_0 - \cos (\theta_0 + \Delta\theta)]$$

Dividiendo entre $\Delta\theta > 0$ se tiene

$$\frac{2\pi m^3}{3} \left[\frac{\cos \theta_0 - \cos (\theta_0 + \Delta\theta)}{\Delta\theta} \right] \leq \frac{V(\theta_0 + \Delta\theta) - V(\theta_0)}{\Delta\theta} \leq \frac{2\pi M^3}{3} \left[\frac{\cos \theta_0 - \cos (\theta_0 + \Delta\theta)}{\Delta\theta} \right]$$

Como f^3 es continua en $[\theta_0; \theta_0 + \Delta\theta]$, por el teorema de los valores intermedios, existe $\theta_1 \in [\theta_0; \theta_0 + \Delta\theta]$ tal que

$$\frac{V(\theta_0 + \Delta\theta) - V(\theta_0)}{\Delta\theta} = \frac{2\pi f^3(\theta_1)}{3} \left[\frac{\cos \theta_0 - \cos (\theta_0 + \Delta\theta)}{\Delta\theta} \right]$$

Tomando límite cuando $\Delta\theta \rightarrow 0^+$, debido a la continuidad de f en θ_0 , se tiene

$$V'(\theta_0^+) = \frac{2\pi f^3(\theta_0)}{3} \sin \theta_0$$

Del mismo modo se hace para $\Delta\theta < 0$. Por tanto,

$$V'(\theta_0) = \frac{2\pi f^3(\theta_0)}{3} \sin \theta_0$$

Finalmente, el volumen del sólido es $V = V(\beta) - V(\alpha)$, esto es

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} f^3(\theta) \sin \theta \, d\theta$$

Ejemplo 26. Calcule el volumen del sólido obtenido al hacer girar el cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$, alrededor del eje polar.

Solución

En la figura 5.38 se observa que para obtener el referido volumen es suficiente girar en torno al eje polar la parte del cardioide que está en el semiplano superior. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3 (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta \, d\theta \\ &= -\frac{2\pi}{3} a^3 \left[\frac{(1 + \cos \theta)^4}{4} \right]_0^\pi \\ &= \frac{8\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

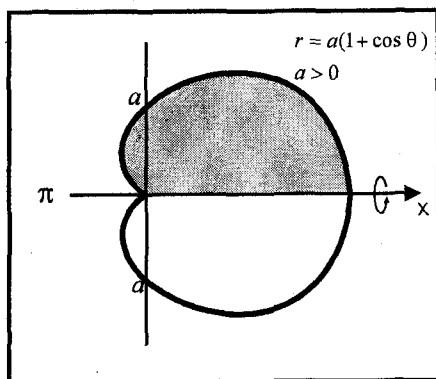


Fig. 5.38

EJERCICIOS

- I. En cada uno de los siguientes ejercicios, calcule el área de la región limitada por las curvas (dadas en coordenadas polares) que se indican y bosqueje la gráfica de la región.

1. $r = a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/3$

R. $(0,37a^2)u^2$

2. $r = a(1 - \cos \theta)$

R. $\left(\frac{3\pi}{2}a^2\right)u^2$

3. $r = 4 \cos 2\theta$

R. $4\pi u^2$

4. $r = a \sin 2\theta$

R. $\frac{\pi a^2}{2}u^2$

5. $r = \cos 3\theta$

R. $\frac{3\pi}{12}u^2$

6. $r = a \cos 5\theta$

R. $\frac{\pi a^2}{4}u^2$

7. $r^2 = a^2 \sin 4\theta$

R. $a^2 u^2$

8. $r = a(1 + 2 \sin \theta), \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ y } \theta = \frac{7\pi}{6}$

R. $\left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)u^2$

9. $r = |4 \sin 2\theta|$

R. $8\pi u^2$

10. $r = b + a \cos \theta \ (0 < b < a)$

R. $\frac{\pi}{2}(2b^2 + a^2)u^2$

11. $r = a \cos 4\theta$

R. $\frac{\pi a^2}{2}u^2$

12. $r^2 = a^2 \cos 8\theta$

R. $a^2 u^2$

13. La región es interior a las curvas $r = 3 + \cos 4\theta$ y $r = 2 - \cos 4\theta$.

R. $37\pi/6 u^2$

14. La región es interior a $r = 3 + \cos 4\theta$ y exterior a $r = 2 - \cos 4\theta$.

15. La región es interior a $r = 2 - \cos 4\theta$ y exterior a $r = 3 + \cos 4\theta$.

16. La región es interior a $r = 2 + \cos 2\theta$ y exterior a $r = 2 + \sin \theta$.

R. $51\sqrt{3}/16 u^2$

17. La región es interior a las curvas $r = 2 + \cos 2\theta$ y $r = 2 + \sin \theta$.

18. La región es interior a $\sqrt{2}r = 3$ y exterior a $r^2 = -9 \cos 2\theta$.
 R. $\left(3\pi - 9 + \frac{9}{2}\sqrt{3}\right)u^2$

19. La región es interior a las curvas $r = 3a \cos 2\theta$ y $r = a(1 + \cos 2\theta)$,
 $a > 0$.

20. La región está comprendida entre la parte externa e interna de
 $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$
 R. $\left(a^2 \frac{5\pi + 18\sqrt{3}}{32}\right)u^2$

21. La región está comprendida entre las curvas:

a) $r = 1 - \cos 2\theta$, $r = 2(1 - \cos 2\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$ R. $\frac{9\pi}{4}u^2$

b) $r = 2a \cos \theta$, $r = 2a \sin \theta$ R. $a^2 \left(\frac{\pi - 2}{2}\right)u^2$

c) $r = a \sin \theta$, $r = a(1 + \cos \theta)$ R. $\left(\frac{\pi - 2}{2}a^2\right)u^2$

d) $r = 2 \sin 2\theta$, $r = 2 \cos 2\theta$ R. $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)u^2$

II. En cada uno de los siguientes ejercicios, calcule la longitud de arco de la curva (en coordenadas polares) que se indica. Además, bosqueje el gráfico de la curva.

1. $r = \sin \theta$, $\theta \in [0; 2\pi]$

R. πu

2. $r = 2\theta$, $\theta \in [0; 2\pi]$

R. $[2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})]u$

3. $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$

R. $8a u$

4. $\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ desde $r = 1$ hasta $r = 3$

R. $\frac{1}{2}(4 + \ln 3)u$

5. El arco de la espiral logarítmica $r = a e^{m\theta}$, $m > 0$, que se encuentra dentro del círculo $r = a$.

R. $a \sqrt{\frac{1 + m^2}{m}} u$

6

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

6.1 VECTORES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

El objetivo de esta sección, es recordar las operaciones con vectores y sus propiedades con la finalidad de hacer uso de ellas en la siguiente sección, razón por la cual no se demostrarán las propiedades.

6.6.1 EL ESPACIO \mathbb{R}^3

El espacio de dimensión tres es el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales y se denota con

$$\mathbb{R}^3 = \{(x; y; z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Así, un vector en el espacio \mathbb{R}^3 es una terna ordenada de números reales y se denota con $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

Igualdad de Vectores

Dos vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ en el espacio \mathbb{R}^3 son iguales si solo si sus componentes correspondientes son iguales, es decir

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2 \quad \text{y} \quad a_3 = b_3$$

Vector nulo

Es el vector que tiene todas sus componentes iguales a cero y se denota con $\vec{0} = (0; 0; 0)$. Este vector es el único vector que no tiene dirección específica

Suma de Vectores

Sean $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ dos vectores en el espacio \mathbb{R}^3 , entonces el vector $\vec{a} + \vec{b}$ está definido como

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

Multiplicación de un escalar por un vector

Sea r un escalar ($r \in \mathbb{R}$) y $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ un vector en el espacio \mathbb{R}^3 , entonces la multiplicación del escalar r por el vector \vec{a} está definido como

$$r \vec{a} = (ra_1; ra_2; ra_3)$$

6.1.1.1 PROPIEDADES

Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son vectores en el espacio \mathbb{R}^3 y $r, s \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades:

1. $\vec{a} + \vec{b}$ es un vector en el espacio \mathbb{R}^3 .
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Propiedad Conmutativa)
3. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (Propiedad Asociativa)
4. Existe un único vector cero $\vec{0} = (0; 0; 0)$ tal que $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\forall \vec{a}$ en \mathbb{R}^3
5. Para cada vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, existe un único vector (opuesto de \vec{a}), $-\vec{a} = (-a_1; -a_2; -a_3)$ tal que $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
6. $r\vec{a}$ es un vector en \mathbb{R}^3
7. $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$
8. $(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$
9. $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$
10. $1\vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a}$ en \mathbb{R}^3

Cualquier sistema matemático en el que estas propiedades son válidas, recibe el nombre de espacio vectorial real. De este modo \mathbb{R}^3 es un espacio vectorial real de dimensión tres.

Sustracción de vectores

Sean $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ dos vectores del espacio \mathbb{R}^3 , entonces la diferencia de estos vectores se define como

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, es decir, $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

6.1.2 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UN VECTOR EN \mathbb{R}^3

Dado que un vector es un ente matemático que tiene dirección, sentido y longitud; es representado por un segmento orientado en el que se distingue un origen y un extremo.

El vector que tiene como origen el origen de coordenadas y extremo cualquier punto $P(x; y; z)$ del espacio \mathbb{R}^3 (Fig. 6.1) se llama **vector de posición** y se denota con

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP} = (x; y; z)$$

donde O es el origen de coordenadas.

Un vector que tiene como origen un punto inicial P_0 y extremo el punto P_1 (Fig. 6.2) se denomina **vector libre** y se denota con

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_0 P_1}$$

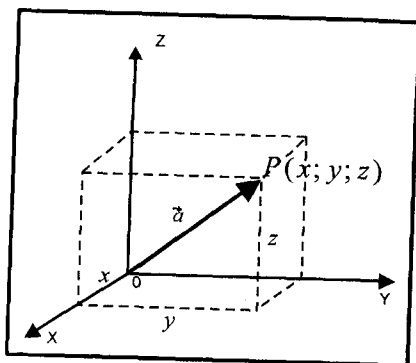


Fig. 6.1

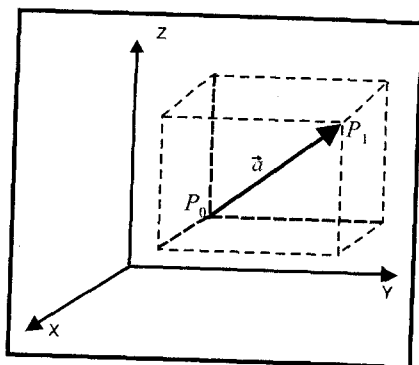


Fig. 6.2

En la figura 6.3 se representa geoméricamente las operaciones entre dos vectores \vec{a} y \vec{b} .

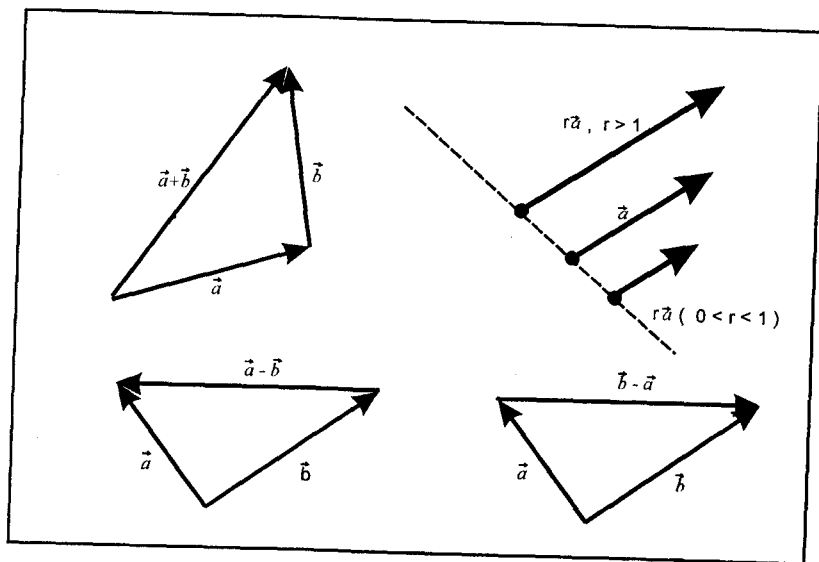


Fig. 6.3

Observación 1 (Componentes de un vector que une dos puntos) Si el punto inicial de un vector \vec{a} es $P_1(x_1; y_1; z_1)$ y el punto extremo es $P_2(x_2; y_2; z_2)$ (Fig. 6.2), entonces

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2; y_2; z_2) - (x_1; y_1; z_1) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

6.1.3 VECTORES PARALELOS EN \mathbb{R}^3

Se dice que dos vectores \vec{a} y \vec{b} en el espacio \mathbb{R}^3 son paralelos, si uno de ellos es múltiplo escalar del otro, es decir,

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = r \vec{b} \vee \vec{b} = s \vec{a}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Dos vectores paralelos \vec{a} y \vec{b} tienen el mismo sentido si

$$\vec{a} = r \vec{b}, \quad r > 0$$

Dos vectores paralelos \vec{a} y \vec{b} tienen sentidos opuestos si

$$\vec{a} = r \vec{b}, \quad r < 0$$

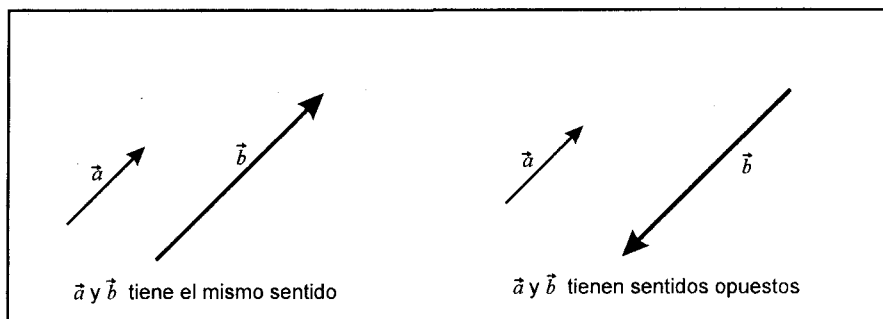


Fig. 6.4

Ejemplo 1

- a) Si $\vec{a} = (1; 3; -4)$ y $\vec{b} = (2; -1; 2)$, encuentre los vectores $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ y $3\vec{a} - 2\vec{b}$
- b) Determine si cada par de los vectores dados $\vec{a} = (-1; 2; -3)$ y $\vec{b} = (5; -10; 15)$, $\vec{c} = (-2; 4; -6)$ y $\vec{d} = (0; 1; 3)$ son paralelos.

Solución

- a) Al aplicar las definiciones dadas se tiene

$$\vec{a} + \vec{b} = (1; 3; -4) + (2; -1; 2) = (3; 2; -2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1; 3; -4) - (2; -1; 2) = (-1; 4; -6)$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(1; 3; -4) - 2(2; -1; 2) = (-1; 11; -16)$$

- b) Tenemos

$$\vec{b} = -5\vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ y tienen sentidos opuestos}$$

$$\vec{c} = 2\vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{c} \text{ y tienen el mismo sentido}$$

Los vectores \vec{a} y \vec{d} no son paralelos

6.1.4 MÓDULO O LONGITUD DE UN VECTOR EN \mathbb{R}^3

La **longitud** o **norma** o **módulo** de un vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ en el espacio \mathbb{R}^3 se denota y se define como

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Por ejemplo, si $\vec{a} = (1; 2; -2) \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

Observación 2

- a) La norma de un vector es la longitud del segmento orientado que lo representa (Fig. 6.5)
- b) Todo vector de longitud igual a 1 se llama **vector unitario**, es decir \vec{u} es unitario si $\|\vec{u}\| = 1$
- c) El vector unitario en la dirección del vector no nulo \vec{a} es el vector

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

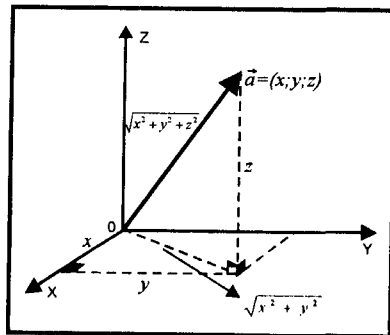


Fig. 6.5

6.1.4.1 PROPIEDADES

Si \vec{a} y \vec{b} son vectores en el espacio \mathbb{R}^3 y r es un escalar, entonces

- 1. $\|\vec{a}\| \geq 0$ y $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- 2. $\|r \vec{a}\| = |r| \|\vec{a}\|$
- 3. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (Desigualdad triangular)
- 4. $\|\vec{a}\| = \|-\vec{a}\|$

6.1.5 PRODUCTO INTERNO O ESCALAR DE VECTORES EN \mathbb{R}^3

Si $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ son vectores en el espacio \mathbb{R}^3 , entonces el **producto interno** o **producto escalar** de \vec{a} y \vec{b} es el número real definido y denotado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \text{ (se lee “}\vec{a} \text{ punto } \vec{b}\text{”)}$$

Por ejemplo, si $\vec{a} = (5; 4; -1)$ y $\vec{b} = (2; -1; 3)$, entonces

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5(2) + 4(-1) + (-1)3 = 3$$

6.1.5.1 PROPIEDADES

Sean \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} vectores en el espacio \mathbb{R}^3 y sea r un escalar. Entonces se tiene

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (Propiedad Conmutativa)
2. $(r \vec{a}) \cdot (\vec{b}) = r (\vec{a} \cdot \vec{b})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$ (Propiedad Distributiva)
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
5. $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
6. $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
7. $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$ (Ley del paralelogramo)

6.1.6 ÁNGULOS ENTRE DOS VECTORES

Sean \vec{a} y \vec{b} vectores no nulos en el espacio \mathbb{R}^3 . El ángulo entre los vectores \vec{a} y \vec{b} es el menor ángulo positivo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) determinado por ambos al partir de un mismo origen común (Fig. 6.6)

Teorema 1 Si θ es el ángulo entre dos vectores no nulos \vec{a} y \vec{b} del espacio \mathbb{R}^3 , entonces

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

Demostración Ejercicio para el lector

Observación 2 Del teorema 1 se deduce que una forma alternativa para calcular el producto escalar de los vectores \vec{a} y \vec{b} es

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

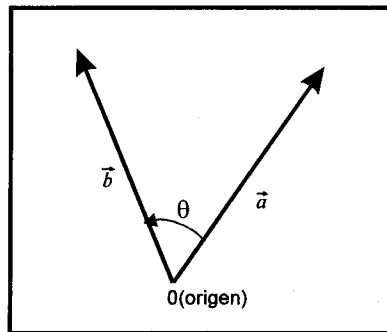


Fig. 6.6

6.1.7 VECTORES ORTOGONALES O PERPENDICULARES

Dos vectores no nulos \vec{a} y \vec{b} en el espacio \mathbb{R}^3 son ortogonales o perpendiculares si el ángulo determinado por ambos es de 90°

Teorema 2 Dos vectores no nulos \vec{a} y \vec{b} en el espacio \mathbb{R}^3 son perpendiculares si y solamente si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Observación 3 Sean \vec{a} y \vec{b} vectores no nulos en el espacio \mathbb{R}^3 . De la figura 6.7 se tiene:

$$i) \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$$

(Teorema de Pitágoras)

$$ii) \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$$

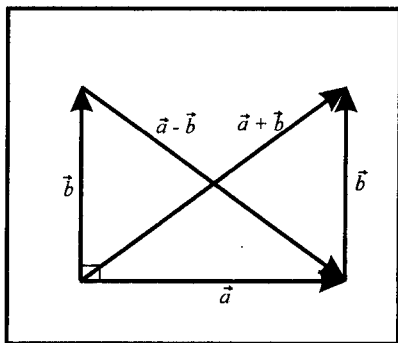


Fig. 6.7

Ejemplo 2 Halle el ángulo que forman los vectores $\vec{a} = (12; 0; -6)$ y $\vec{b} = (-6; 0; 3)$

Solución

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{-72 + 0 - 18}{\sqrt{180} \sqrt{45}} = \frac{-90}{2\sqrt{45} \sqrt{45}} = \frac{-90}{90} = -1 \Rightarrow \theta = \pi$$

Ejemplo 3 Calcule el producto escalar de los vectores \vec{a} y \vec{b} si se sabe que forman un ángulo de 30° , $\|\vec{a}\| = 4$ y $\|\vec{b}\| = 6\sqrt{3}$

Solución

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos 30^\circ = 4(6\sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 36$$

Ejemplo 4 Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores que forman entre sí un ángulo de 45° y $\|\vec{a}\| = 3$. Calcule $\|\vec{b}\|$ si se sabe que el vector $\vec{a} - \vec{b}$ es perpendicular al vector \vec{a} .

Solución

Puesto que el vector $\vec{a} - \vec{b}$ es perpendicular al vector \vec{a} , se tiene

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow 9 = \|\vec{b}\| (3) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Leftrightarrow \|\vec{b}\| = 3\sqrt{2}$$

Ejemplo 5 Sean \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} vectores en el espacio \mathbb{R}^3 tales que $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = 2\sqrt{3}$ y $\|\vec{c}\| = 2$. Sabiendo que los vectores \vec{a} y \vec{b} forman un ángulo de 30° , los vectores \vec{b} y \vec{c} un ángulo de 60° y los vectores \vec{a} y \vec{c} un ángulo de 90° , calcule

- a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ b) $\|\vec{a} - \vec{c}\|$

Solución Tenemos

$$a) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos 30^\circ + \|\vec{a}\| \|\vec{c}\| \cos 90^\circ$$

$$= 6(2\sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 6(2)(0) = 18$$

$$b) \|\vec{a} - \vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + \|\vec{c}\|^2 = 36 - 2\|\vec{a}\| \|\vec{c}\| \cos 90^\circ + 4 = 40$$

De donde se obtiene

$$\|\vec{a} - \vec{c}\| = \sqrt{40}$$

6.1.8 COMPONENTE Y PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR EN LA DIRECCIÓN DE OTRO VECTOR

Sean \vec{a} y \vec{b} vectores no nulos en el espacio \mathbb{R}^3

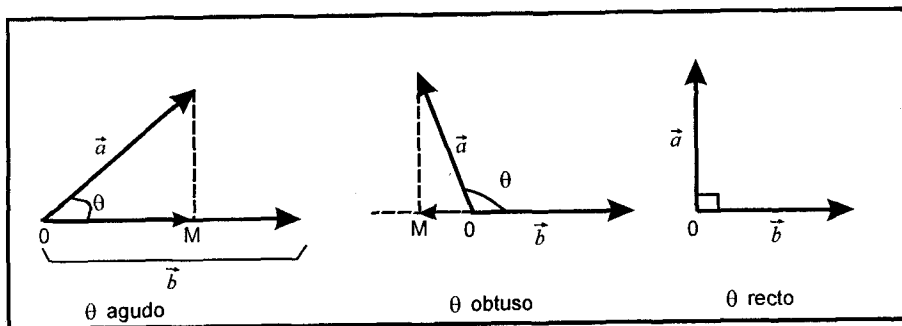


Fig. 6.8

Al vector \overline{OM} (Fig. 6.8) se llama **vector proyección ortogonal de \vec{a} sobre \vec{b}** y se denota como

$$\overline{OM} = \text{Proy}_{\vec{b}} \vec{a}$$

En el siguiente teorema veremos el procedimiento para determinar este vector

Teorema 3 Sean \vec{a} y \vec{b} vectores no nulos en el espacio \mathbb{R}^3 , entonces

a) El vector proyección ortogonal de \vec{a} sobre \vec{b} es el vector dado por

$$\overrightarrow{\text{Proy}}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \right) \vec{b} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} \right) \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

b) Al escalar que multiplica al vector unitario $\vec{u}_{\vec{b}} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ se denomina

componente del vector \vec{a} en la dirección \vec{b} (se denota $\text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a}$), es decir,

$$\text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Ejemplo 6 Halle el vector proyección ortogonal de \vec{a} sobre \vec{b} y la componente del vector \vec{a} en la dirección \vec{b} de los vectores $\vec{a} = (5; 0; 4)$ y $\vec{b} = (2; -1; 2)$

Solución

El vector proyección ortogonal de \vec{a} sobre \vec{b} es el vector

$$\overrightarrow{\text{Proy}}_{\vec{b}} \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \right) \vec{b} = \left(\frac{10 + 0 + 8}{9} \right) (2; -1; 2) = 2(2; -1; 2) = (4; -2; 4)$$

La componente del vector \vec{a} en la dirección de \vec{b} es el escalar

$$\text{Comp}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{18}{3} = 6$$

6.1.8.1 PROPIEDADES

Sean \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} vectores no nulos en el espacio \mathbb{R}^3 y k un escalar cualquiera distinto de cero. Entonces

1. $\overrightarrow{\text{Proy}}_{\vec{c}}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \overrightarrow{\text{Proy}}_{\vec{c}} \vec{a} \pm \overrightarrow{\text{Proy}}_{\vec{c}} \vec{b}$
2. $\overrightarrow{\text{Proy}}_{\vec{c}}(k\vec{a}) = k \overrightarrow{\text{Proy}}_{\vec{c}} \vec{a}$
3. $\overrightarrow{\text{Proy}}_{(k\vec{c})} \vec{a} = \overrightarrow{\text{Proy}}_{\vec{c}} \vec{a}$
4. $\text{Comp}_{\vec{c}}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \text{Comp}_{\vec{c}} \vec{a} \pm \text{Comp}_{\vec{c}} \vec{b}$
5. $\text{Comp}_{\vec{c}}(k\vec{a}) = k \text{Comp}_{\vec{c}} \vec{a}$
6. $\text{Comp}_{(k\vec{c})} \vec{a} = \begin{cases} \text{Comp}_{\vec{c}} \vec{a}, & \text{si } k > 0 \\ -\text{Comp}_{\vec{c}} \vec{a}, & \text{si } k < 0 \end{cases}$

Ejemplo 7 Sean \vec{a} y \vec{b} vectores en el espacio \mathbb{R}^3 que verifican $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$ y $\text{comp}_{\vec{b}}\vec{a} = -6$. Calcule el valor de $\lambda = 5(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b})$

Solución

Como $\vec{a} = -3\vec{b}$, entonces los vectores \vec{a} y \vec{b} tienen sentidos opuestos. Luego, el ángulo que forman estos vectores es $\theta = \pi$. Además,

$$\|\vec{a}\| = \|-3\vec{b}\| = 3\|\vec{b}\| \quad (1)$$

Por otra parte,

$$\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\pi}{\|\vec{b}\|} = -\|\vec{a}\| = -6 \Rightarrow \|\vec{a}\| = 6 \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos $\|\vec{b}\| = 2$

Ahora bien, usando las propiedades del producto escalar resulta

$$\begin{aligned} \lambda &= 5(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b}) = 5(9\|\vec{a}\|^2 - 4\|\vec{b}\|^2) = 5[9(36) - 4(4)] \\ &= 1540 \end{aligned}$$

Ejemplo 8 Dado el triángulo de vértices $A(5; 2; 3)$, $B(8; 2; -1)$ y $C(3; 3; 5)$

a) Halle las componentes del vector $\overrightarrow{\text{Proy}_{\vec{AC}}\vec{MN}}$ si se sabe que el vector \vec{MN} es paralelo al vector \vec{AC} , donde M está sobre el lado AB , N sobre el lado BC y $\|\vec{MN}\| = 18$

b) Calcule $\lambda = 5(\vec{AC} \cdot \vec{u}_{\vec{AB}} + \frac{3}{5}\text{Comp}_{\vec{AC}}\vec{AB})$

Solución

Sean los vectores $\vec{AB} = (3; 0; -4)$ y $\vec{AC} = (-2; 1; 2)$

a) Como $\vec{MN} \parallel \vec{AC}$, entonces $\overrightarrow{\text{Proy}_{\vec{AC}}\vec{MN}} = \vec{MN}$. Además,

$$\vec{MN} = k\vec{AC} = k(-2; 1; 2) \quad (k > 0)$$

$$\text{Por otra parte, } \|\vec{MN}\| = \sqrt{9k^2} = 3k = 18 \Rightarrow k = 6$$

$$\text{Por consiguiente, } \overrightarrow{\text{Proy}_{\vec{AC}}\vec{MN}} = 6(-2; 1; 2) = (-12; 6; 12)$$

b) Aquí tenemos

$$\vec{u}_{\vec{AB}} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{1}{5}(3; 0; -4) = \left(\frac{3}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right)$$

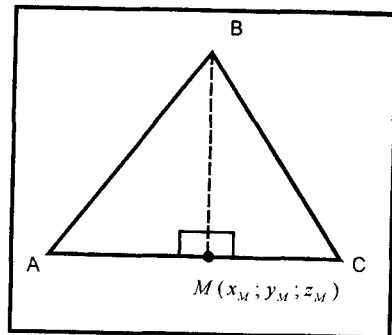
$$\text{Comp}_{\vec{AC}}\vec{AB} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{-6 - 8}{3} = -\frac{14}{3}$$

Luego resulta

$$\lambda = 5\left(\vec{AC} \cdot \vec{u}_{\vec{AB}} + \frac{3}{5}\text{Comp}_{\vec{AC}}\vec{AB}\right) = 5\left(-\frac{14}{5} - \frac{14}{5}\right) = -28$$

Ejemplo 9

- a) En el triángulo ABC que se muestra en la figura adjunta se tiene $A(3;1;1)$ y $\overrightarrow{\text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB}} = (2; -1; 5)$. Determine las coordenadas del punto M , que es el pie de la perpendicular trazada del vértice B al lado AC .
- b) Si se sabe que los vectores unitarios \vec{u} y \vec{v} forman un ángulo de 120° y los vectores \vec{w} y \vec{v} un ángulo de 90° , calcule el valor de $\|\overrightarrow{\text{Proy}_{\vec{v}}(4\vec{u} + \vec{w})}\|$

**Solución**

- a) Utilizando la definición de la proyección de un vector sobre otro, tenemos

$$\overline{AM} = \overrightarrow{\text{Proy}_{\overline{AC}}\overline{AB}} = (2; -1; 5)$$

$$\Leftrightarrow (x_M - 3; y_M - 1; z_M - 1) = (2; -1; 5)$$

$$\Leftrightarrow x_M = 5, y_M = 0 \wedge z_M = 6$$

Por lo tanto, las coordenadas del pie de la perpendicular trazada del vértice B al lado AC es $M(5; 0; 6)$

- b) Tenemos $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ y $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$. Así,

$$\overrightarrow{\text{Proy}_{\vec{v}}(4\vec{u} + \vec{w})} = \left(\frac{(4\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \right) \vec{v} = (4\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}) \vec{v} = 4 \left(-\frac{1}{2} \right) \vec{v} = -2\vec{v}$$

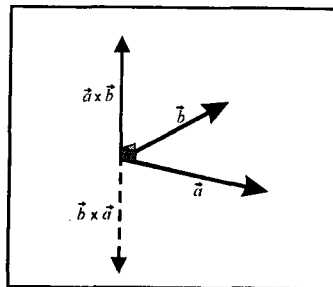
Por lo tanto, el módulo buscado es

$$\|\overrightarrow{\text{Proy}_{\vec{v}}(4\vec{u} + \vec{w})}\| = \|-2\vec{v}\| = 2\|\vec{v}\| = 2$$

6.1.9 PRODUCTO VECTORIAL

Sean $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ dos vectores en el espacio \mathbb{R}^3

Se denomina **producto vectorial** de los vectores \vec{a} y \vec{b} al vector que es perpendicular al plano que contiene a los vectores \vec{a} y \vec{b} y se denota con $\vec{a} \times \vec{b}$. Antes de dar su definición precisa, es conveniente tener en cuenta la siguiente observación.

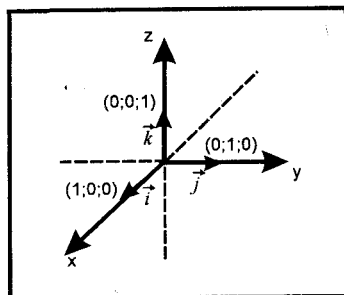


Observación 4 Los vectores unitarios que siguen el sentido positivo de los ejes coordenados son

$$\vec{i} = (1; 0; 0), \quad \vec{j} = (0; 1; 0) \text{ y } \vec{k} = (0; 0; 1)$$

A estos vectores también se les llama vectores de la base canónica en \mathbb{R}^3

Los vectores unitarios \vec{i}, \vec{j} y \vec{k} se utilizan para representar cualquier vector del espacio \mathbb{R}^3 en su forma algebraica. En efecto, si $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, entonces se tiene



$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) = (a_1; 0; 0) + (0; a_2; 0) + (0; 0; a_3)$$

$$= a_1(1; 0; 0) + a_2(0; 1; 0) + a_3(0; 0; 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Luego, todo vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ se puede escribir en su forma algebraica

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Ahora podemos expresar el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ en términos de los vectores \vec{i}, \vec{j} y \vec{k} mediante el siguiente determinante de orden 3×3

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente que $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, es decir, el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a los vectores \vec{a} y \vec{b} .

Ejemplo 10 Considerando los vectores $\vec{a} = ((1; -1; 1)$ y $\vec{b} = (2; 0; 1)$, halle un vector que sea perpendicular tanto a \vec{a} como a \vec{b}

Solución

El vector que es perpendicular a ambos vectores, es el vector $\vec{a} \times \vec{b}$. Así tenemos

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

6.1.9.1 PROPIEDADES

Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} vectores en el espacio \mathbb{R}^3 y k cualquier escalar. Entonces

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (Propiedad Anticonmutativa)
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \pm (\vec{a} \times \vec{c})$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ } Leyes distributivas
4. $k\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k\vec{a} \times \vec{b}$
5. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
6. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
7. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
8. $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
9. $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$, donde θ es el ángulo entre \vec{a} y \vec{b}
10. $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
11. Si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \times \vec{c}$
12. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

6.1.10 APLICACIONES DEL PRODUCTO VECTORIAL

6.1.10.1 ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

Sean \vec{a} y \vec{b} vectores no nulos y no paralelos en el espacio \mathbb{R}^3 . Ahora, consideremos que estos vectores son los lados de un paralelogramo, tal como se muestra en la figura 6.10. El área A_{\square} del paralelogramo es

$$A_{\square} = (\text{base}) \cdot (\text{altura}) = (\|\vec{a}\|)(\|\vec{b}\| \sin \theta) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

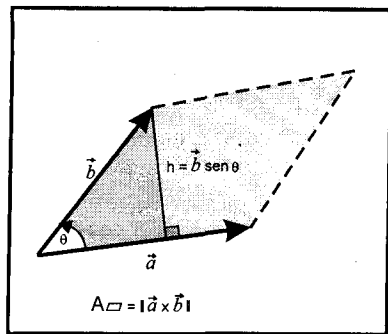


Fig. 6.10

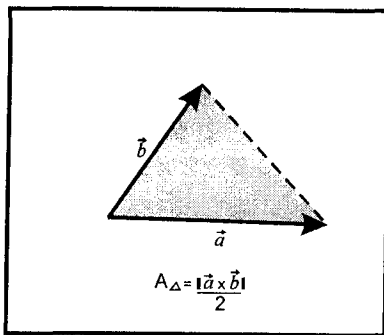


Fig. 6.11

6.1.10.2 ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores no nulos y no paralelos en el espacio \mathbb{R}^3 . El área del triángulo determinado por los vectores \vec{a} y \vec{b} (Fig. 6.11) es

$$A_{\Delta} = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{2} u^2$$

6.1.11 EL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

Sean $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ y $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$ vectores en el espacio \mathbb{R}^3 . El triple producto escalar de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} está definido y denotado por

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 11 Dados los vectores $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$ y $\vec{c} = (1; 0; 2)$, halle $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Solución

Por la definición, se tiene

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4 + 1 - 2 = 3 \end{aligned}$$

6.1.11.1 PROPIEDADES

Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} vectores en el espacio \mathbb{R}^3

1. El triple producto escalar de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} es independiente del orden circular de la operación, es decir,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

2. Los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son coplanares (están en el mismo plano) si y solamente si $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$
3. Si $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, entonces uno de los vectores es el vector nulo o dos de los vectores son paralelos o los tres vectores son coplanares.

6.1.12 APLICACIÓN DEL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

6.1.12.1 VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO

Sean $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ vectores determinados por las aristas adyacentes de un paralelepípedo $ABCDEFGH$ (Fig. 6.12).

El volumen V_p del paralelepípedo determinado por los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} está dado por

$$V_p = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AE})| u^3$$

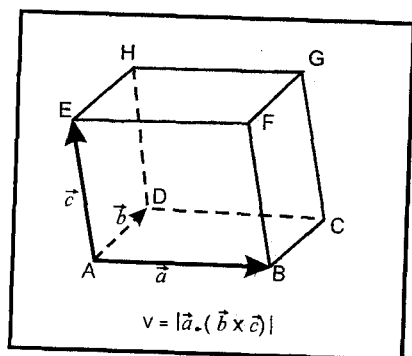


Fig. 6.12

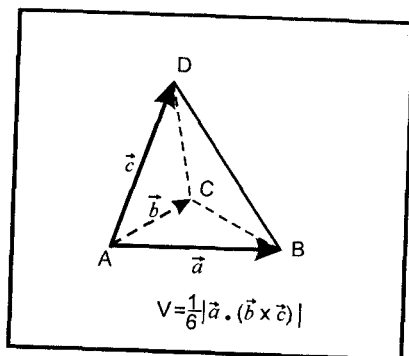


Fig. 6.13

6.1.12.2 VOLUMEN DE UN TETRAEDRO

Sean $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ y $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ vectores determinados por las aristas adyacentes de un tetraedro $D-ABC$ (Fig. 6.13).

El volumen V_T del tetraedro determinado por los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} está dado por

$$V_T = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| u^3$$

Ejemplo 12 El vector de posición \vec{a} se encuentra en el plano yz y el vector de posición \vec{b} sobre el eje y negativo, de manera que el ángulo entre ellos es 120° . Si $\|\vec{a}\| = \sqrt{27}$ y $\|\vec{b}\| = 8$, halle el vector $\vec{a} \times \vec{b}$

Solución

Dado que $\vec{a} = (0; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (0; b_2; 0)$ ($b_2 < 0$), se tiene

$$i) \quad \|\vec{b}\| = \sqrt{b_2^2} = 8 \Rightarrow b_2 = -8 \Rightarrow \vec{b} = (0; -8; 0)$$

$$ii) \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin 120^\circ = \sqrt{27} (8) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 36$$

$$\text{iii) } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = (-8a_3; 0; 0)$$

$$\text{De ii) y iii) se obtiene } \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{64a_3^2} = 36 \Rightarrow a_3 = \pm \frac{9}{2}$$

Por lo tanto, el vector es $\vec{a} \times \vec{b} = (\pm 36; 0; 0)$

Ejemplo 13 En el paralelepípedo que se muestra en la figura adjunta se tiene $A(1; 1; 1)$, $B(3; 1; 1)$, $C(3; 4; 1)$ y $E(3; 1; 5)$

Calcule:

- El área del paralelogramo $CDHE$
- El volumen del tetraedro de vértices A , B , C y H .

Solución

- De la figura se obtiene

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = (-2; 0; 0), \overrightarrow{CE} = (0; -3; 4). \text{ Entonces}$$

$$\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CE} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (0; 8; 6)$$

Luego, el área del paralelogramo $CDHE$ es

$$A_{\square} = \|\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CE}\| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ u}^2$$

- De la figura resulta $H(1; 1; 5)$, entonces

$$\overrightarrow{BC} = (0; 3; 0), \overrightarrow{BA} = (-2; 0; 0) \text{ y } \overrightarrow{BH} = (-2; 0; 4). \text{ Luego,}$$

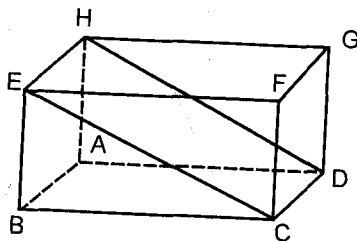
$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; 6)$$

Por tanto, el volumen del tetraedro $H-BCA$ es

$$V_T = \frac{1}{6} |\overrightarrow{BH} \cdot (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA})| = \frac{1}{6} |24| = 4 \text{ u}^3$$

Ejemplo 14 Dados los puntos $A(1; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 2)$ y $D(x; 0; 0)$

- Determine el vector \vec{a} , si se sabe que es perpendicular al plano que contiene al triángulo ABC y que $\|\vec{a}\| = 14 \text{ u}$
- Si el volumen del tetraedro $C-ABD$ es 3 u^3 , determine las coordenadas del punto D .



Solución

- a) Los vectores $\overrightarrow{AB} = (-1; 3; 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 2)$ se encuentran en el mismo plano del triángulo ABC, entonces

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6; 2; 3)$$

Como $\vec{a} \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{a} = k \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6k; 2k; 3k)$.

Puesto que $\|\vec{a}\| = 14$, entonces

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{36k^2 + 4k^2 + 9k^2} = 14 \Leftrightarrow 7|k| = 14 \Leftrightarrow k = \pm 2$$

Por tanto, $\vec{a} = (12; 4; 6) \vee \vec{a} = (-12; -4; -6)$

- b) Los vectores aristas adyacentes del tetraedro C-ABD son

$$\overrightarrow{AB} = (-1; 3; 0), \quad \overrightarrow{AD} = (x-1; 0; 0) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-1; 0; 2)$$

El triple producto escalar de estos vectores es

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ x-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6(x-1)$$

Dado que el volumen del tetraedro es $3u^3$, entonces se tiene

$$V_T = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{6} |-6(x-1)| = |x-1| = 3 \Rightarrow x = -2 \vee x = 4$$

Por consiguiente, $D(-2; 0; 0) \vee D(4; 0; 0)$

Ejemplo 15 Con los puntos $A(8; 0; 0)$, $C(4; -1; 1)$, $D(6; 0; 5)$ y B (punto del primer octante) se forma un paralelepípedo cuyas aristas son los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AD}

- a) Calcule el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los puntos A , C y D .
- b) Sabiendo que el vector \overrightarrow{AB} es paralelo al vector $\vec{n} = (1; 1; 1)$ y el volumen del paralelepípedo es de $44u^3$, determine las coordenadas del punto B .

Solución

- a) Dado que los vectores adyacentes que forman la cara ACHD (paralelogramo) del paralelepípedo son $\overrightarrow{AC} = (-4; -1; 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-2; 0; 5)$, entonces

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-5; 18; -2)$$

Luego, el área de la cara del paralelepípedo es

$$A_{\square} = \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{25 + 324 + 4} = \sqrt{353} u^2$$

- b) Como $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{n} = (1; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\vec{n} = (k; k; k) (k > 0)$. Luego,

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} k & k & k \\ -4 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 11k$$

Puesto que el volumen del paralelepípedo es $44u^3$, entonces se tiene

$$V_p = |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = |11k| = 44 \Leftrightarrow k = 4$$

Por tanto, de $\overrightarrow{AB} = (4; 4; 4)$ resulta $B = (12; 4; 4)$

Ejemplo 16

- a) Si los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son unitarios y satisfacen la condición:
 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, calcule el valor de $M = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- b) Los vectores \vec{a} y \vec{b} son tridimensionales y forman un ángulo de 30° . Si $\|\vec{a}\| = 4$, $\|\vec{b}\| = 6$, utilizando el álgebra vectorial, calcule el área del triángulo cuyos lados adyacentes son los vectores \vec{a} y \vec{b} .

Solución

- a) Dado que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad (*)$$

Como los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son unitarios, entonces $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 1$

Reemplazando estos valores en (*) se obtiene

$$1 + 1 + 1 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow M = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{3}{2}$$

- b) El área del triángulo cuyos lados adyacentes son los vectores \vec{a} y \vec{b} es

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \frac{1}{2} \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} (4)(6) \left(\frac{1}{2}\right) = 6u^2$$

Ejemplo 17 Los puntos $A(4; 2; 0)$, $B(4; 8; 0)$, $D(-2; 2; 0)$ y $H(-2; 4; 8)$ son los vértices del paralelepípedo $ABCDEFGH$

- a) Calcule su volumen
- b) Determine la altura del paralelepípedo

Solución

- a) Los vectores de las aristas adyacentes del paralelepípedo son

$$\overrightarrow{AB} = (0; 6; 0), \overrightarrow{AD} = (-6; 0; 0) \text{ y } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} = (0; 2; 8)$$

Luego, el volumen del paralelepípedo es

$$V = |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AE})| = \left| \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} \right| = |288| = 288 u^3$$

b) Tenemos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; 36)$$

Así, el área del paralelogramo $ABCD$ es $A_{\square} = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = 36 u^2$

Puesto que el volumen del paralelepípedo $ABCDEFGH$ es

$$V_P = (\text{área de la base})(\text{altura}) = (36)(h) = 288 \Rightarrow h = 8 u$$

Observación 5 Sean $P_1(x_1; y_1; z_1)$ y $P_2(x_2; y_2; z_2)$ los extremos de un segmento P_1P_2 . Entonces las coordenadas del punto $P(x; y; z)$ que divide al segmento en la razón dada $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ ($r \neq -1$) son

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}, \quad z = \frac{z_1 + rz_2}{1+r}$$

Observación 6 Si $M(x; y; z)$ es el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1; y_1; z_1)$ y $P_2(x_2; y_2; z_2)$, entonces

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Ejemplo 18 Dados los puntos $P_1(5; 7; 9)$ y $P_2(3; -5; -7)$, halle los puntos de trisección del segmento P_1P_2

Solución

Sean $A_1(x_1; y_1; z_1)$ y $A_2(x_2; y_2; z_2)$ los puntos de trisección del segmento P_1P_2

Para encontrar las coordenadas del punto A_1 , la razón es $r = \frac{P_1A_1}{A_1P_2} = \frac{1}{2}$

Luego, por la observación 5 se tiene

$$x_1 = \frac{5 + \frac{1}{2}(3)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{13}{3}, \quad y_1 = \frac{7 + \frac{1}{2}(-5)}{1 + \frac{1}{2}} = 3, \quad z_1 = \frac{9 + \frac{1}{2}(-7)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{11}{3}$$

Análogamente, para el punto A_2 la razón es $r = \frac{P_1A_2}{A_2P_2} = \frac{2}{1} = 2$

Por consiguiente, las coordenadas del punto A_2 son

$$x_2 = \frac{5 + 2(3)}{1 + 2} = \frac{11}{3}, \quad y_2 = \frac{7 + 2(-5)}{1 + 2} = -1, \quad z_2 = \frac{9 + 2(-7)}{1 + 2} = -\frac{5}{3}$$

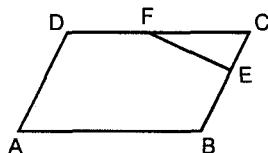
EJERCICIOS

1. Exprese el vector \vec{a} como la suma de un vector paralelo \vec{b} y un vector ortogonal a \vec{b} , si $\vec{a} = (2; 1; -1)$ y $\vec{b} = (1; 4; -2)$
2. Halle el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (3; 1; 2)$ y $\vec{b} = (1; 1; 2)$
3. Si el ángulo que forman los vectores \vec{a} y \vec{b} es de 45° y $\|\vec{a}\| = 3$, halle el módulo de \vec{b} para que $\vec{a} + \vec{b}$ forme con \vec{a} un ángulo de 30° .

$$R. 3(\sqrt{2} + \sqrt{6})/2$$

4. Sean \vec{a} y \vec{b} dos vectores unitarios en \mathbb{R}^3 . Demuestre que $\vec{a} + \vec{b}$ es un vector unitario \Leftrightarrow el ángulo formado por ellos es de 120° .
5. Dado el paralelogramo $ABCD$, E está a $2/3$ de la distancia de B a C y F es el punto medio de \overline{CD} . Halle r y s de modo que $\overline{EF} = r\overline{AB} + s\overline{AC}$

$$R. r = -1/2, s = 1/3$$



6. Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} tres vectores de módulos r , s y t respectivamente. Sea α el ángulo entre \vec{b} y \vec{c} , β el ángulo entre \vec{a} y \vec{c} y γ el ángulo entre \vec{a} y \vec{b} . Pruebe que el módulo S de la suma de tres vectores está dado por la fórmula

$$S^2 = r^2 + s^2 + t^2 + 2st \cos \alpha + 2rt \cos \beta + 2rs \cos \gamma$$

7. Si $\vec{a} = (1; 3; 2)$, $\vec{b} = (1; -1; 3)$ y $\vec{c} = (2; 3; -4)$
 - i) Halle el área del paralelogramo determinado por \vec{a} y \vec{b}
 - ii) Halle el área del triángulo determinado por \vec{a} y \vec{c}
 - iii) Halle el volumen del paralelepípedo determinado por \vec{a} , \vec{b} y \vec{c}
8. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(1; 2; 3)$, $B(0; 2; 1)$ y $C(-1; -2; -4)$. Halle el área y el perímetro del triángulo.
9. Los vértices de un tetraedro son los puntos $A(2; 1; 0)$, $B(1; -1; 1)$, $C(3; 4; 2)$ y $D(0; 0; -1)$. Calcule el volumen del tetraedro.
10. En el triángulo de vértices $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ y $C(0; 0; 5)$, halle
 - i) Las longitudes de cada mediana
 - ii) Las longitudes de cada altura
 - iii) El centro de gravedad del triángulo
11. Sean $P(3; 1; -1)$ y $Q(4; -1; 2)$. Halle las coordenadas del punto R que se encuentra en la prolongación de \overline{PQ} y extendiendo 3 veces su longitud.

13. Un auto recorre 20km hacia el norte y después $40\sqrt{2}$ en una dirección 60° al oeste del norte. Halle el vector desplazamiento resultante del auto y su longitud.

$$R. \vec{r} = (-20; 40) \text{ y } \|\vec{r}\| = 20\sqrt{5} \text{ km}.$$

14. Sean \vec{a} y \vec{b} son vectores en el espacio R^3 que verifican: $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$ y $\text{comp}_{\vec{b}}\vec{a} = -8$. Determine el valor de $M = 2(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b})$.

$$R. M = -160.$$

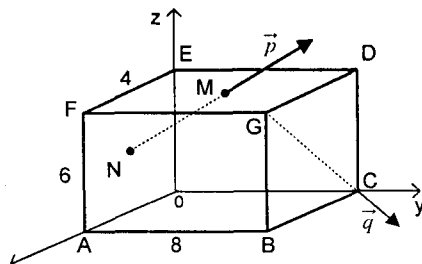
15. Dado el triángulo de vértices $A(2; -2; 4)$, $B(4; 2; 6)$ y $C(4; 8; 10)$.

a) Halle el vector unitario de \overline{MN} , si MN es paralelo al lado AB , M sobre el lado AC y N sobre el lado BC .

b) Determine las componentes del vector \overline{MN} , si se sabe que $\overline{MN} \cdot \overline{AC} = 56$.

$$R. \overline{MN} = (2; 4; 2).$$

16. En la figura adjunta, M y N son los centros de las caras $GDEF$ y $OAFE$ respectivamente.



Si $\|\vec{p}\| = 10$ y $\|\vec{q}\| = 4\sqrt{13}$, determine las componentes del vector $2\vec{p} - 3\vec{q}$.

$$R. 2\vec{p} - 3\vec{q} = (34; 16; 48)$$

17. Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y \vec{d} vectores unitarios en el espacio R^3 . Si se sabe que los vectores \vec{a} y \vec{b} forman un ángulo de 60° y los vectores \vec{c} y \vec{d} un ángulo de 120° , halle:

$$a) \text{Comp}_{\vec{b}}(4\vec{a}) \quad b) \overline{\text{Proy}}_{4\vec{b}}(4\vec{a}) \quad c) (\overline{\text{Proy}}_{2\vec{a}}(2\vec{c} + 3\vec{d})) \cdot \vec{d}$$

$$R. a) 2 \quad b) 2\vec{b} \quad c) 2.$$

18. El vector posición \vec{a} se encuentra en el plano yz y el vector posición \vec{b} sobre el eje y negativo, de manera que el ángulo entre ellos es 120° . Si $\|\vec{a}\| = \sqrt{27}$ y $\|\vec{b}\| = 8$, halle las componentes del vector $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$R. (\pm 36; 0; 0).$$

19. Sean \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} vectores no nulos tales que $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{b}\| = 1, \|\vec{c}\| = 4$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Calcule el valor de $\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

$$R. -13$$

20. Dados los puntos: $A(8; 0; 0)$, $C(4; -1; 1)$, $D(6; 0; 5)$ y B un punto del primer octante.

- En el espacio \mathbb{R}^3 , grafique el paralelepípedo cuyas aristas son los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AD} .
- Calcule el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los puntos A , C y D .
- Si se sabe que el vector \overrightarrow{AB} es paralelo al vector $\vec{n} = (1; 1; 1)$ y el volumen del paralelepípedo es de $44u^3$, determine las coordenadas del punto B .

R. b) $\sqrt{353} u^2$ c) $B(12; 4; 4)$.

19. a) Dado el triángulo de vértices $A(3; 1; 1)$, $B(2; 1; 4)$ y $C(5; 4; 6)$. Halle las componentes del vector $\text{Proy}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{MN}$, si se sabe que el vector \overrightarrow{MN} es paralela al lado AC del triángulo, M está sobre el lado AB , N sobre el lado BC y $\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{38}/3$.

- Dados los vectores $\vec{a} = (2; -1; 1)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$ y $\vec{c} = (4; 3; -3)$. Calcule $6(\vec{a} \cdot \vec{u}_{\vec{b}}) + \sqrt{34} \text{Comp}_{\vec{c}} \vec{b}$.

R. a) $(2/3; 1; 5/3)$ b) -17 .

21. Dados los puntos $A(2; 4; 3)$, $B(4; 5; 5)$ y $C(-1; 4; 0)$.

- Halle dos vectores unitarios perpendiculares simultáneamente a los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} .
- Sea M un punto interior del segmento \overline{AC} tal que $d(A; M) = \frac{2}{3} d(A; C)$. Si $Q(-1; 4; 2)$, determine si el ángulo formado por los vectores \overrightarrow{QC} y \overrightarrow{QM} es agudo o no.

R. a) $\vec{u} = (\mp 1/\sqrt{2}; 0; \pm 1/\sqrt{2})$ b) Es agudo

22. Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} tres vectores en el espacio \mathbb{R}^3 tales que $\vec{a} = 2\vec{c}$, $\|\vec{c}\| = 2$ y $\vec{b} \cdot \vec{c} = 4$. Si se sabe que los vectores \vec{b} y \vec{c} forman un ángulo de 60° , halle la longitud del vector $\sqrt{3} \vec{a} \times \vec{b} - 5 \vec{a} \times \vec{c}$.

23. Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} vectores no nulos en el espacio \mathbb{R}^3 tales que $\|\vec{c}\| = 4$, $\text{Proy}_{\vec{c}} \vec{b} = \vec{b}$ y $\text{Proy}_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = \vec{0}$. Si se sabe que los vectores \vec{a} y \vec{b} son unitarios, halle el módulo del vector $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. R. 25

25. Dados los puntos $A(-1; 5; 3)$ y $B(0; 3; 1)$.

- Halle dos vectores unitarios paralelos al vector \overrightarrow{AB} .
- Determine dos vectores unitarios perpendiculares al vector \overrightarrow{AB} y paralelo al vector $\vec{b} = (1; 1; -1/2)$.

R. a) $\vec{w} = (\pm 1/3; \mp 2/3; \mp 2/3)$ b) $\vec{u} = (\pm 2/3; \pm 2/3; \mp 1/3)$

6.2 RECTA EN EL ESPACIO

6.2.1 ÁNGULOS, COSENNOS Y NÚMEROS DIRECTORES DE UNA RECTA

Definición 1 Sea L una recta en el espacio \mathbb{R}^3 . Se llama **conjunto de ángulos directores** de la recta L al conjunto ordenado $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, donde α, β, γ son los ángulos que forma la recta L con los rayos positivos de los ejes de coordenadas x, y y z respectivamente (Fig. 6.14)

Los ángulos directores toman valores entre 0° y 180° , es decir,

$$0^\circ \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 180^\circ$$

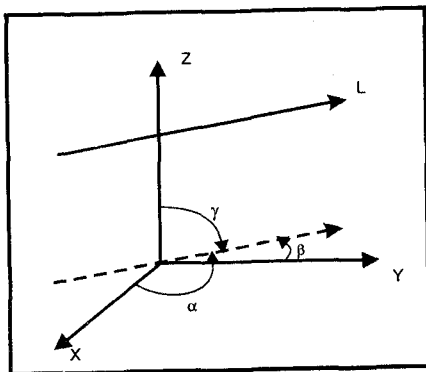


Fig. 6.14

Observación 7 El ángulo entre dos rectas que no se intersectan, se define como el ángulo formado por rectas que se intersectan y que, al mismo tiempo son paralelas a las rectas dadas.

Si una recta no está orientada (con respecto al sentido que debe tomar) tiene dos conjuntos de ángulos directores que son:

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ y } \{180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma\}$$

En lo que sigue, las rectas serán consideradas sin orientación.

Definición 2 Los cosenos de los ángulos directores de una recta se llaman **cosenos directores** de la recta.

Una recta tiene dos conjuntos de cosenos directores.

$$\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \text{ y } \{-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma\}$$

Observación 8 Dos rectas son paralelas si y solo si tienen los mismos cosenos directores.

Definición 3 Un conjunto $[a; b; c]$ es llamado **números directores** si existe una constante $k \neq 0$ tal que

$$a = k \cos \alpha, \quad b = k \cos \beta, \quad c = k \cos \gamma$$

6.2.1.1 EXPRESIÓN DE LOS COSENOS DIRECTORES DE UNA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Sea L una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1; z_1)$ y $P_2(x_2; y_2; z_2)$ y sean $d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|$ y α, β, γ los ángulos directores de L .

Los cosenos directores de la recta L que pasa por los puntos P_1 y P_2 son

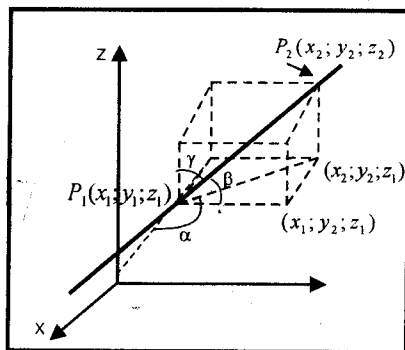


Fig. 6.15

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

Si la recta L está orientada en el sentido de P_2 a P_1 , entonces los cosenos directores de la recta son

$$\cos \alpha = -\frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = -\frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \gamma = -\frac{z_2 - z_1}{d}$$

donde d es la distancia entre P_1 y P_2

6.2.1.2 RELACIÓN ENTRE LOS COSENOS DIRECTORES DE UNA RECTA

Si elevamos al cuadrado cada una de las expresiones de los cosenos directores de la recta L que pasa por los puntos P_1 y P_2 y sumamos, se obtiene

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{d^2} = \frac{d^2}{d^2} = 1$$

Por lo tanto, una relación fundamental entre los cosenos directores de una recta es

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Ejemplo 19

- Halle los cosenos directores de una recta determinada por los puntos $P_1(1; 0; 2)$ y $P_2(3; 2; 3)$ y dirigido de P_1 a P_2
- Si $\{45^\circ, 60^\circ, \gamma\}$ es un conjunto de ángulos directores de una recta, calcule los posibles valores del ángulo γ

Solución

- a) La distancia entre P_1 y P_2 es $d = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. Luego, los **cosenos directores** de la recta que pasa por P_1 y P_2 son

$$\cos \alpha = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{3}$$

- b) De la relación entre los cosenos directores de una recta, se tiene

$$\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$$

De donde resulta $\cos \gamma = 60^\circ \vee \gamma = 120^\circ$

6.2.2 ECUACIONES DE UNA RECTA EN EL ESPACIO \mathbb{R}^3

Una recta es un conjunto de puntos que se desplazan en el espacio \mathbb{R}^3 en una dirección constante (Fig. 6.16)

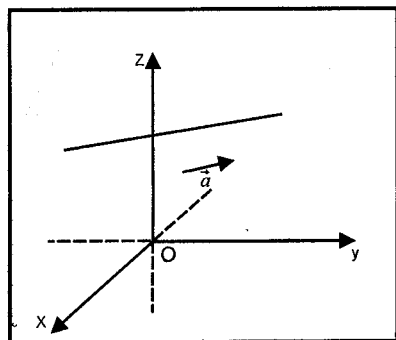


Fig. 6.16

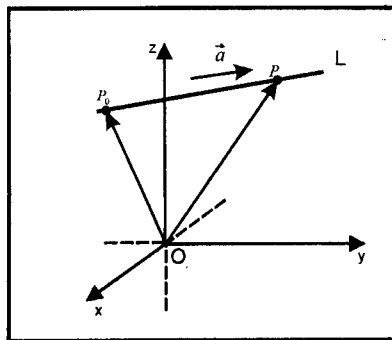


Fig. 6.17

6.2.2.1 ECUACIÓN VECTORIAL DE UNA RECTA EN EL ESPACIO \mathbb{R}^3

Sea L una recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ y sigue la dirección del vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ (Fig. 6.17). El vector \vec{a} se llama **vector dirección** de la recta L .

Sea $P(x; y; z)$ un punto cualquiera de la recta L . Entonces $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo al vector \vec{a} , luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} \Leftrightarrow P = P_0 + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, la **ecuación vectorial** de la recta L es

$$L: (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 20 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(3; 2; -1)$ y $P_2(5; -2; 4)$

Solución

El vector dirección de la recta que pasa por P_1 y P_2 es $\vec{d} = \overrightarrow{P_1P_2} = (2; -4; 5)$

Tomando el punto $P_1(3; 2; -1)$ como P_0 , la ecuación de la recta es

$$L: (x; y; z) = (3; 2; -1) + t(2; -4; 5)$$

6.2.2.2 ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE UNA RECTA EN EL ESPACIO

De la ecuación vectorial de la recta $L: (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + t\vec{d}$, se tiene que cualquier punto $P(x; y; z) \in L$ verifica la igualdad

$$(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + t(a_1; a_2; a_3)$$

Luego, de la igualdad de vectores resulta

$$L: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones paramétricas** de la recta L que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ y es paralela al vector \vec{d} , y t se llama **parámetro** de la ecuación.

Ejemplo 21 Halle las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P_1(2; 3; 4)$ y $P_2(-1; -3; 2)$

Solución

El vector dirección de la recta es $\vec{d} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-3; -6; -2)$. Así, las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$L: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

6.2.2.3 ECUACIÓN SIMÉTRICA DE UNA RECTA EN EL ESPACIO

Sea L una recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$L: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Si ninguno de los números a_1, a_2 y a_3 es cero, entonces despejando t de cada una de las ecuaciones paramétricas e igualando los resultados se obtiene

$$L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (*)$$

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones simétricas** de la recta L que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ y es paralela al vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Las componentes del vector a_1, a_2 y a_3 son los números directores de la recta L .

Observación 9

a) Si uno de los números directores a_1, a_2 ó a_3 es igual a cero, no podemos usar la ecuación (*). En este caso se emplean otras relaciones

Por ejemplo, si $a_1 = 0$, la ecuación de L se escribe como

$$L: x = x_0 \wedge \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Si $a_2 = 0$, la ecuación de la recta L se escribe como

$$L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{z - z_0}{a_3} \wedge y = y_0$$

Si $a_3 = 0$. La ecuación de L se escribe como

$$L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \wedge z = z_0$$

b) Si dos de los números directores a_1, a_2 ó a_3 son iguales a cero, tampoco se puede usar (*). Por ejemplo, si $a_1 = a_3 = 0$, la ecuación de la recta L se escribe como $L: x = x_0 \wedge z = z_0$

Ejemplo 22 Determine las ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto $A(1; 2; 2)$ y es perpendicular a las rectas

$$L_1: (x; y; z) = (3; 2; -1) + t(2; -1; 0) \text{ y}$$

$$L_2: (x; y; z) = (0; -3; 0) + s(-12; 3; 13)$$

Solución

Aquí el vector dirección \vec{a} de la recta L que pasa por el punto A es perpendicular a los vectores $\vec{b} = (2; -1; 0)$ (vector dirección de L_1) y $\vec{c} = (-12; 3; 13)$ (vector dirección de L_2). Entonces $\vec{a} \parallel \vec{b} \times \vec{c}$, donde

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -12 & 3 & 13 \end{vmatrix} = (-13; -26; -6)$$

Ahora, tomando el vector $\vec{a} = (13; 26; 6)$, las ecuaciones de la recta L son:

Forma vectorial $L: (x; y; z) = (1; 2; 2) + t(13; 26; 6), t \in \mathbb{R}$

Forma paramétrica $L: \begin{cases} x = 1 + 13t \\ y = 2 + 26t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$

Forma simétrica $L: \frac{x - 1}{13} = \frac{y - 2}{26} = \frac{z - 2}{6}$

6.2.3 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

En el espacio \mathbb{R}^3 las rectas $L_1: (x; y; z) = P_0 + t\vec{a}$ y $L_2: (x; y; z) = Q_0 + t\vec{b}$ pueden tener las siguientes posiciones relativas

6.2.3.1 RECTAS PARALELAS

Las rectas L_1 y L_2 son paralelas si sus vectores dirección \vec{a} y \vec{b} son paralelos. Como consecuencia de este resultado tenemos

Observación 10

- i) Para todo punto P_1 de \mathbb{R}^3 y toda recta $L_1: (x; y; z) = P_0 + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$, existe una única recta L que pasa por el punto P_1 y es paralela a la recta L_1
- ii) Si L_1 y L_2 son dos rectas paralelas, entonces $L_1 = L_2$ ó $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

6.2.3.2 RECTAS SECANTES

Las rectas L_1 y L_2 son secantes si se intersecan en un único punto, esto es, $L_1 \cap L_2 = \{P_0\}$

6.2.3.3 RECTAS QUE SE CRUZAN

Las rectas L_1 y L_2 se cruzan si no se cortan y no son paralelas. Dos rectas que se cruzan están en planos paralelos, esto es, no se encuentran en un mismo plano.

6.2.4 ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

El ángulo entre las rectas $L_1: (x; y; z) = P_0 + t\vec{a}$ y $L_2: (x; y; z) = Q_0 + s\vec{b}$ (Fig. 6.18) es el ángulo θ comprendido entre los vectores dirección \vec{a} y \vec{b}

De la definición del ángulo entre dos vectores, una relación para calcular el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 es

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

Si el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 es recto, se dice que las rectas son **ortogonales** o **perpendiculares**, esto es,

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

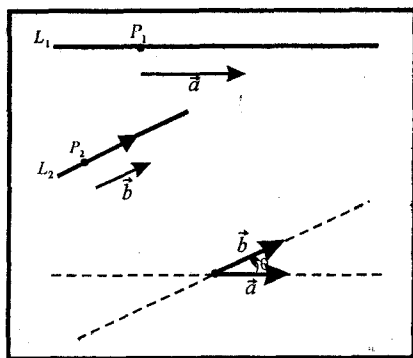


Fig. 6.18

6.2.5 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto y $L: (x; y; z) = P_0 + t\vec{a}$ una recta en el espacio \mathbb{R}^3 .

Ahora, si d es la distancia del punto P_1 a la recta L (Fig. 6.19), entonces

$$d = \|\vec{v}\| \sin \theta$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores \vec{a} y $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$

Por una propiedad del producto vectorial se sabe que

$$\|\vec{a} \times \vec{v}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{v}\| \sin \theta = \|\vec{a}\| (d)$$

De donde resulta

$$d = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\|\vec{a} \times \overrightarrow{P_0P_1}\|}{\|\vec{a}\|}$$

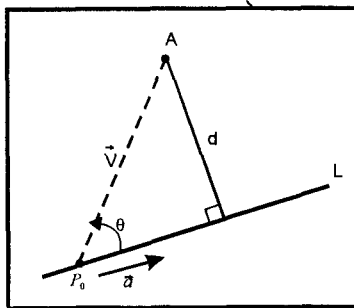


Fig. 6.19

Ejemplo 23 Calcule la distancia del punto $A(3; 2; -1)$ a la recta

$$L: P = (1; 3; 2) + t(-1; 2; 3), t \in \mathbb{R}$$

Solución

En este caso $\vec{a} = (-1; 2; 3)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{P_0A} = (2; -1; -3)$, entonces

$\vec{a} \times \vec{v} = (-3; 3; -3)$. Luego,

$$d = \frac{\sqrt{9+9+9}}{\sqrt{9+4+1}} = \sqrt{\frac{27}{14}}$$

Ejemplo 24 Sean las rectas:

$$L_1: P = (-2; 1; 0) + t(-2; 1; -1), t \in \mathbb{R}$$

$$L_2: Q = (3; 7; 1) + s(-1; 2; 3), s \in \mathbb{R}$$

$$L_3: x = 2 + 4t, y = -1 - 2t, z = 2 + 2t$$

$$L_4: \frac{x-9}{4} = y-4 = \frac{z-3}{8}$$

$$L_5: R = (3; 4; 0) + r(4; -2; 2), r \in \mathbb{R}$$

Determine si son o no paralelas cada uno de los siguientes pares de rectas, en caso que sean secantes determine su intersección.

a) L_1 y L_2

b) L_1 y L_3

c) L_1 y L_5

d) L_2 y L_4

e) L_2 y L_3

f) L_4 y L_5

Solución

a) Como los vectores dirección $\vec{a} = (-2; 1; -1)$ y $\vec{b} = (-1; 2; 3)$ no son paralelos, entonces las rectas L_1 y L_2 no son paralelas.

Supongamos que $A(x; y; z) \in L_1 \cap L_2$, entonces existen valores únicos para t y s para los cuales

$$A = (-2; 1; 0) + t(-2; 1; -1) = (3; 7; 1) + s(-1; 2; 3)$$

Por la igualdad de vectores, se obtiene

$$-2 - 2t = 3 - s \quad (1)$$

$$1 + t = 7 + 2s \quad (2)$$

$$-t = 1 + 3s \quad (3)$$

Resolviendo (2) y (3) se obtiene $s = -\frac{7}{5}$ y $t = \frac{26}{5}$, pero estos valores no satisfacen (1). Luego, no existe punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2 , es decir, L_1 y L_2 se cruzan.

En forma análoga se prueba los siguientes resultados.

b) $L_1 \parallel L_3 \wedge L_1 = L_3$

c) $L_1 \parallel L_5 \wedge L_1 \cap L_5 = \emptyset$

d) $L_2 \nparallel L_4 \wedge L_1 \cap L_5 = A(5; 3; -5)$

e) $L_2 \nparallel L_3 \wedge L_2 \wedge L_3$ se cruzan

Ejemplo 25 Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(3; 1; 5)$ y es paralelo a la recta $L_1: 2x - 2 = 1 - y \wedge z = 4$

Solución

En primer lugar reordenando la ecuación de la recta L_1 tenemos

$$2x - 2 = 1 - y \wedge z = 4 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{y - 1}{-2} \wedge z = 4$$

Luego, la ecuación vectorial de L_1 es $L_1: P = (1; 1; 4) + t(1; -2; 0), t \in \mathbb{R}$

Como $L \parallel L_1 \Rightarrow L \parallel \vec{a}$, donde $\vec{a} = (1; -2; 0)$ es el vector dirección de L_1

Por tanto, la ecuación de la recta buscada es

$$L: Q = (3; 1; 5) + \lambda(1; -2; 0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 26 Halle la ecuación de la recta que pasa por $P_0(3; 1; -2)$ e interseca y es perpendicular a la recta $L_1: x + 1 = y + 2 = z + 1$

Solución

La forma vectorial de la ecuación de la recta L_1 es

$$L_1: Q = (-1; -2; -1) + \lambda(1; 1; 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Sea A el punto de intersección de las rectas L_1 y L (Fig. 6.20). Como $A \in L_1$, entonces $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $A(-1 + k; -2 + k; -1 + k)$.

Por la condición de perpendicularidad resulta

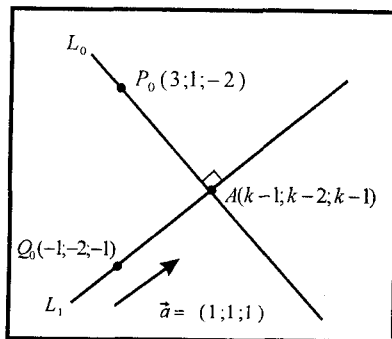


Fig. 6.20

$$\overrightarrow{P_0A} = (k - 4; k - 3; k + 1) \perp \vec{d} = (1; 1; 1)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0A} \cdot \vec{d} = k - 4 + k - 3 + k + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 2$$

Así, $A(1; 0; 1)$

Luego, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_0(3; 1; -2)$ y $A(1; 0; 1)$ es

$$L: P = (3; 1; -2) + t(2; 1; -3), t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 27 Determine la ecuación de la recta que pasa por $P_0(1; 4; 0)$ y es perpendicular a las rectas

$$L_1: x = 3 + t, y = 4 + t, z = -1 + t \quad \wedge \quad L_2: \frac{x + 4}{6} = \frac{2y - 1}{3} \quad \wedge \quad z = \frac{1}{2}$$

Solución

Sea \vec{a} el vector dirección de la recta L buscada.

Un vector dirección de L_2 es $\vec{v} = (4; 1; 0)$ y el vector dirección de L_1 es $\vec{b} = (1; 1; 1)$. Como $L \perp L_2$ y $L \perp L_1 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{v}$ y $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{v} \times \vec{b} = (1; -4; 3)$$

Luego, la ecuación de la recta buscada es

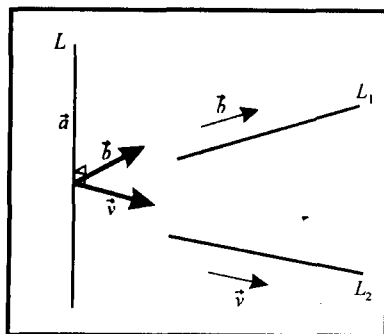


Fig. 6.21

$$L: P = (1; 4; 0) + t(1; -4; 3), t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 28 Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de \overline{AB} y corta bajo un ángulo de 60° a la recta que pasa por los puntos R y S , donde $A(2; 4; 0)$, $B(0; 0; -2)$, $R(3; 3; 3)$ y $S(-1; 3; 3)$.

Solución

Este problema tiene dos soluciones (Fig. 6.22).

El punto medio del segmento \overline{AB} es $M(1; 2; -1)$ y la ecuación de la recta L_1 que pasa por R y S es

$$L_1: P = (-1; 3; 3) + t(1; 0; 0), t \in \mathbb{R}$$

Sea I el punto de intersección de L con L_1

$$\Rightarrow I \in L_1 \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} / I(-1 + t; 3; 3)$$

De la condición de que la recta L interseca a la recta L_1 bajo un ángulo de 60° resulta

$$\cos 60^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}, \text{ donde } \vec{a} = (1; 0; 0), \vec{b} = \overrightarrow{MI} = (t - 2; 1; 4)$$

De donde se obtiene

$$\frac{1}{2} = \frac{t - 2}{\sqrt{(t - 2)^2 + 1 + 16}} \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{17/3} \Rightarrow I(1 \pm \sqrt{17/3}; 3; 3)$$

Luego, las ecuaciones de las rectas buscadas son

$$L: Q = (1; 2; -1) + r(\sqrt{17/3}; 1; 4), r \in \mathbb{R}$$

$$L': Q' = (1; 2; -1) + \lambda(-\sqrt{17/3}; 1; 4), \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 29 Halle el punto en la recta $L: P = (2; 11; 14) + t(2; 4; 5)$, $t \in \mathbb{R}$ que equidista de las rectas

$$L_1: \text{Eje } x \quad \wedge$$

$$L_2: Q = (1; 7; 0) + s(0; 0; 1), s \in \mathbb{R}$$

Solución

Un bosquejo de este problema se muestra en la Fig. 6.23.

La ecuación del eje x es

$$L_1: R = (0; 0; 0) + t(1; 0; 0), t \in \mathbb{R}$$

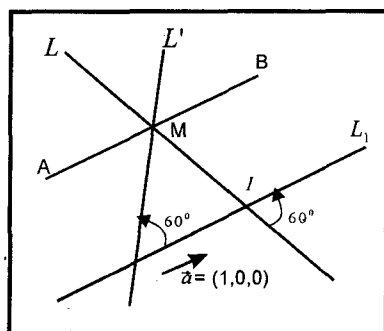


Fig. 6.22

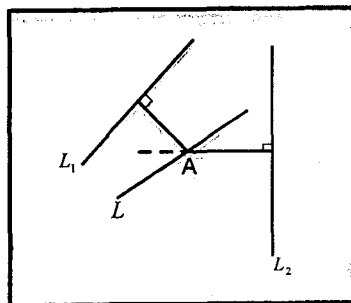


Fig. 6.23

Sea $A \in L$ el punto que equidista de las rectas L_1 y L_2 , entonces

$$A(2 + 2t; 11 + 4t; 14 + 5t)$$

Luego,

$$\begin{aligned} d(A; L_1) &= \frac{\|\overrightarrow{OA} \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\|(2 + 2t, 11 + 4t, 14 + 5t) \times (1; 0; 0)\|}{\|(1; 0; 0)\|} \\ &= \sqrt{(14 + 5t)^2 + (11 + 4t)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(A; L_2) &= \frac{\|\overrightarrow{Q_0A} \times \vec{b}\|}{\|\vec{b}\|} = \frac{\|(1 + 2t, 4 + 4t, 14 + 5t) \times (0; 0; 1)\|}{\|(0; 0; 1)\|} \\ &= \sqrt{(4 + 4t)^2 + (1 + 2t)^2} \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación que resulta de $d(A; L_1) = d(A; L_2)$ se obtiene

$$t = -2 \vee t = -50/7$$

Luego, los puntos de la recta L que equidistan de las rectas L_1 y L_2 son

$$A_1(-2; 3; 4) \quad \text{y} \quad A_2(-66/7; -123/7; -152/7)$$

EJERCICIOS

- Encuentre la distancia del punto $A(3; 2; 1)$ a la recta que pasa por los puntos $P_0(1; 2; 9)$ y $P_1(-3; -6; -3)$
- Si $L_1: P = (1; 0; -1) + t(1; 1; 0), t \in \mathbb{R}$ y $L_2: Q = (0; 0; 1) + s(1; 0; 0), s \in \mathbb{R}$, halle la ecuación de la recta L que es perpendicular a L_1 y L_2 y las interseca.
- Determine la ecuación de la recta que interseca a las rectas $L_1: P = (1; -1; 1) + t(1; 0; -1), t \in \mathbb{R}$ y $L_2: Q = (1; 0; 0) + s(-1; 1; 1), s \in \mathbb{R}$ en los puntos A y B respectivamente, de tal manera que la longitud del segmento \overline{AB} sea mínima.
- Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(19; 0; 0)$ y corta a las rectas $L_1: P = (5; 0; -1) + t(1; 1; 1), t \in \mathbb{R}$
 $L_2: Q = (-1; 2; 2) + s(-2; 1; 0), s \in \mathbb{R}$
- Una recta pasa por el punto $A(1; 1; 1)$ y forma ángulos de 60° y 30° con los ejes x y y respectivamente. Halle la ecuación vectorial de dicha recta.
R. $L: P = (1; 1; 1) + t(1; \pm\sqrt{3}; 0), t \in \mathbb{R}$
- Una recta que pasa por el punto $A(-2; 1; 3)$ es perpendicular e interseca a la recta $L_1: P = (2; 2; 1) + t(1; 0; -1), t \in \mathbb{R}$. Halle la ecuación vectorial de dicha recta.
R. $Q = (-2; 1; 3) + s(1; 1; 1), s \in \mathbb{R}$

6.3 PLANO EN EL ESPACIO

Un plano en el espacio es un conjunto de puntos que se desplazan de tal manera, que el vector que forma estos puntos con un punto fijo es perpendicular al vector dirección del plano (Fig. 6.24). El vector dirección se llama **vector normal** del plano y se denota con \vec{N} .

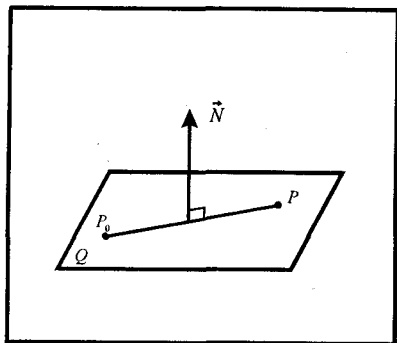


Fig. 6.24

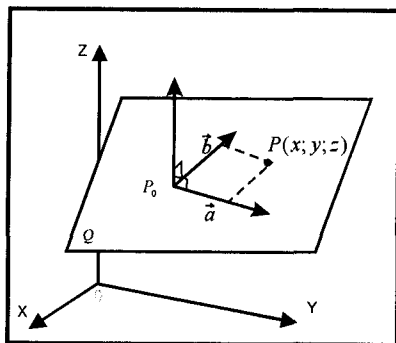


Fig. 6.25

Observación 11 La ecuación de un plano queda completamente determinado cuando se conoce:

- i) Un punto de paso y su vector normal ó
- ii) Un punto de paso y dos vectores paralelos al plano ó
- iii) Tres puntos no colineales del plano

6.3.1 ECUACIONES DE UN PLANO EN EL ESPACIO

6.3.1.1 ECUACIÓN VECTORIAL DE UN PLANO EN EL ESPACIO

Sea Q un plano que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ y es paralelo a los vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, donde el vector \vec{a} no es paralelo al vector \vec{b} (Fig. 6.25)

Sea $P(x; y; z)$ un punto cualquiera del plano Q , entonces existen $r, s \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{P_0P} = r\vec{a} + s\vec{b}$

De donde, $P - P_0 = r\vec{a} + s\vec{b}$ ó $P = P_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$

Por consiguiente, la **ecuación vectorial** del plano Q es

$$Q: (x; y; z) = P_0 + r\vec{a} + s\vec{b}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

6.3.1.2 ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE UN PLANO EN EL ESPACIO

De la ecuación vectorial del plano $Q: P = P_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$, se tiene que cualquier punto $P(x; y; z) \in Q$ verifica la igualdad, es decir

$$(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + r(a_1; a_2; a_3) + s(b_1; b_2; b_3)$$

Luego, por la igualdad de vectores resulta

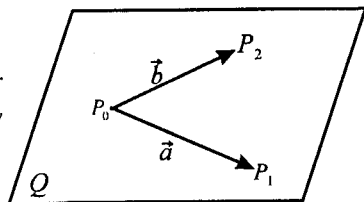
$$Q: \begin{cases} x = x_0 + ra_1 + sb_1 \\ y = y_0 + ra_2 + sb_2 \\ z = z_0 + ra_3 + sb_3 \end{cases}, r, s \in \mathbb{R}$$

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas** del plano Q que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ y es paralelo a los vectores \vec{a} y \vec{b} , r y s se llaman **parámetros** de la ecuación.

Ejemplo 30 Halle las ecuaciones vectorial y paramétrica del plano que pasa por los puntos $P_0(3; 1; 2)$, $P_1(1; -1; 2)$ y $P_2(2; 0; 3)$

Solución

Los vectores paralelos al plano Q que pasa por P_0, P_1 y P_2 son $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = (-2; -2; 0)$ y $\vec{b} = \overrightarrow{P_0P_2} = (-1; -1; 1)$



Luego, la ecuación vectorial del plano Q es

$$Q: P = (3; 1; 2) + r(-2; -2; 0) + s(-1; -1; 1), r, s \in \mathbb{R}$$

y su ecuación paramétrica es:

$$Q: \begin{cases} x = 3 - 2r - s \\ y = 1 - 2r - s \\ z = 2 + s \end{cases}, r, s \in \mathbb{R}$$

Observación 12

- De la ecuación vectorial del plano se obtiene que $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$ es un vector perpendicular al plano. En general, todo vector no nulo perpendicular al plano es llamado **normal** del plano.
- Si \vec{N} es una normal del plano $Q: P = P_0 + r\vec{a} + s\vec{b}, r, s \in \mathbb{R}$ y P_1 y P_2 son dos puntos del plano, entonces $\vec{N} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$.
- Si \vec{N} es la normal del plano $Q: P = P_0 + r\vec{a} + s\vec{b}, r, s \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{P_0P_1} \perp \vec{N}$ entonces $P_1 \in Q$
- Si \vec{N} es la normal del plano $Q: P = P_0 + r\vec{a} + s\vec{b}, r, s \in \mathbb{R}$, entonces $Q = \{P(x; y; z) \mid \vec{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0\}$ y es el único plano que pasa por P_0 con normal \vec{N}

6.3.1.3 ECUACION GENERAL DE UN PLANO

Sea Q un plano que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ y cuyo vector normal es $\vec{N} = (A; B; C)$.

Sea $P(x; y; z)$ un punto cualquiera del plano Q , entonces

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\Leftrightarrow (A; B; C) \cdot (x - x_0; y - y_0; z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Por lo tanto, la **ecuación general** del plano Q es de la forma

$$Q: Ax + By + Cz + D = 0$$

Esta ecuación también es llamada ecuación **cartesiana del plano**.

En lo que sigue, por ecuación del plano se entenderá a la ecuación cartesiana.

Ejemplo 31

- a) Halle la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(2; 3; -5)$ y es ortogonal al segmento $\overline{PQ_1}$, donde $P(3; -2; 1)$ y $Q_1(1; 3; 0)$
- b) Halle la ecuación del plano que contiene a los puntos P_0 , P y Q_1 dados en (a).

Solución

- a) Sea $\vec{N} = \overrightarrow{Q_1P} = (2; -5; 1)$ y $P_0(2; 3; -5)$, entonces la ecuación general del plano es

$$Q: 2(x - 2) - 5(y - 3) + 1(z + 5) = 0 \quad \text{ó}$$

$$Q: 2x - 5y + z + 16 = 0$$

- b) De la Fig. 6.26 se tiene

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_0Q_1} = (-1; 0; 5) \text{ y}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{P_0P} = (1; -5; 6)$$

$$\text{Entonces } \vec{N} \parallel \vec{a} \times \vec{b} = (25; 11; 5)$$

Tomando $\vec{N} = (25; 11; 5)$, la ecuación del plano es:

$$Q: 25(x - 2) + 11(y - 3) + 5(z + 5) = 0 \quad \text{ó}$$

$$Q: 25x + 11y + 5z - 58 = 0$$

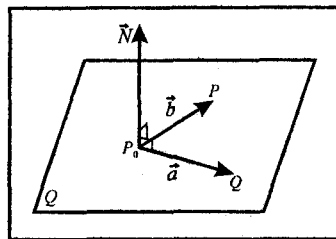
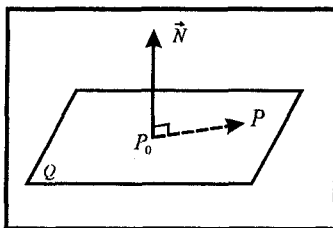


Fig. 6.26

Observación 13 Sea Q un plano cuya normal es \vec{N} y L una recta cuyo vector dirección es \vec{a} , entonces se tiene

i) $L \parallel Q \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{a} = 0$ (Fig. 6.27)

ii) $L \perp Q \Leftrightarrow \vec{N} \parallel \vec{a}$ (Fig. 6.28)

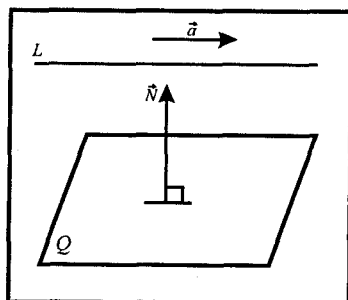


Fig. 6.27

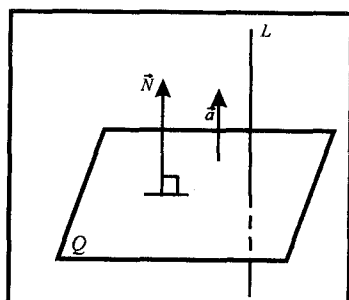


Fig. 6.28

iii) Si $L \parallel Q \Rightarrow L \cap Q = \emptyset$ ó $L \subset Q$

iv) $L \subset Q \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{a}$ y $P_0 \in L \Rightarrow P_0 \in Q$ (Fig. 6.29)

v) Si $L \nparallel Q \Rightarrow L \cap Q = l$ es un punto. (Fig. 6.30)

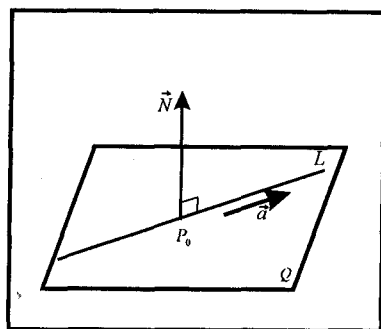


Fig. 6.29

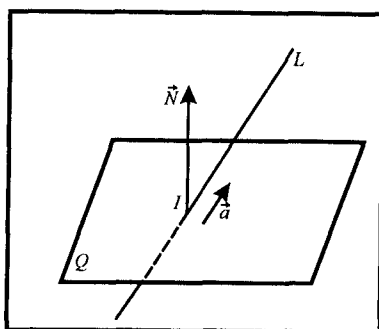


Fig. 6.30

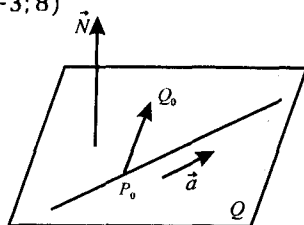
Ejemplo 32 Halle la ecuación del plano que contiene a la recta

$L: P = (1; 2; 2) + t(0; 3; 1), t \in \mathbb{R}$ y el punto $Q_0(2; -3; 8)$

Solución

Sea \vec{N} el vector normal del plano Q que contiene a la recta L y al punto Q_0 , entonces

$\vec{N} \perp \vec{a} = (0; 3; 1) \wedge \vec{N} \perp \overrightarrow{P_0 Q_0} = (1; -5; 6)$,
donde $P_0(1; 2; 2)$



$$\text{Luego, } \vec{N} \parallel \vec{d} \times \overrightarrow{P_0Q_0} = (23; 1; 3)$$

Por lo tanto, al tomar $\vec{N} = (23; 1; 3)$ como vector normal del plano Q que pasa por el punto Q_0 , su ecuación es

$$Q: 23(x - 2) + (y + 3) + 3(z - 8) = 0 \quad \text{ó}$$

$$Q: 23x + y + 3z - 97 = 0$$

6.3.2 POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS EN EL ESPACIO

En el espacio los planos

$$Q_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{y} \quad Q_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

pueden tener las siguientes posiciones relativas

6.3.2.1 PLANOS PARALELOS

Los planos Q_1 y Q_2 son paralelos $\Leftrightarrow \vec{N}_{Q_1} \parallel \vec{N}_{Q_2} \Leftrightarrow \vec{N}_{Q_1} = \lambda \vec{N}_{Q_2}$

Observación 14 Si Q_1 y Q_2 son dos planos paralelos, entonces

- i) $Q_1 = Q_2$ (planos coincidentes)
- ii) $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ (planos paralelos no coincidentes)

6.3.2.2 PLANOS SECANTES

Los planos Q_1 y Q_2 son secantes $\Leftrightarrow \vec{N}_{Q_1} \nparallel \vec{N}_{Q_2} \Leftrightarrow Q_1 \cap Q_2 = L$, donde L es la recta de intersección de los planos.

La ecuación de la recta de intersección de los planos Q_1 y Q_2 se escribe como

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ó } L: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \wedge \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Observación 15

- i) Los planos secantes Q_1 y Q_2 son perpendiculares si y solamente si sus vectores normales son perpendiculares, esto es,

$$\text{Plano } Q_1 \perp \text{plano } Q_2 \Leftrightarrow \vec{N}_{Q_1} \perp \vec{N}_{Q_2} \Leftrightarrow \vec{N}_{Q_1} \cdot \vec{N}_{Q_2} = 0$$

- ii) Si $Q_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $Q_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ son planos secantes, entonces la ecuación de la familia de planos que pasan por la intersección de estos planos es

$$Q_F: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

donde k es el parámetro de la familia.

Observación 16 Las ecuaciones de los planos coordenados y de los planos paralelos a estos son

- i) Ecuación del plano coordenado xy : $z = 0$
- ii) Ecuación del plano coordenado xz : $y = 0$
- iii) Ecuación del plano coordenado yz : $x = 0$
- iv) Ecuación del plano paralelo al plano xy que pasa por el punto $(0; 0; k)$ es $z = k$
- v) Ecuación del plano paralelo al plano xz que pasa por el punto $(0; k; 0)$ es $y = k$
- vi) Ecuación del plano paralelo al plano yz que pasa por el punto $(k; 0; 0)$ es $x = k$

Ejemplo 33

- a) Halle la ecuación del plano que contiene al punto $P_0(2; 6; -1)$ y es paralelo al plano $Q: 4x - 2y + z - 1 = 0$
- b) Halle la distancia del punto $Q_0(2; -1; 3)$ a la recta $L: 2x - y + z - 3 = 0 \wedge x + 2y - z + 1 = 0$

Solución

- a) Sea \vec{N}_1 el vector normal al plano Q_1 que pasa por el punto P_0 , entonces $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_Q = (4; -2; 1)$. Así, al tomar $\vec{N}_1 = (4; -2; 1)$, la ecuación del plano Q_1 es

$$Q_1: 4(x - 2) - 2(y - 6) + 1(z + 1) = 0 \quad \text{ó} \quad 4x - 2y + z + 5 = 0$$

- b) Para hallar la distancia del punto Q_0 a la recta L , es necesario tener la ecuación de la recta en su forma vectorial. Así, al resolver simultáneamente las ecuaciones de los dos planos que da origen a la recta L , se tiene:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 & (1) \\ x + 2y - z + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Sumando (1) y (2) resulta $3x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - 3x$ (3)

Reemplazando (3) en (1) se obtiene $z = 5 - 5x$ (4)

Haciendo $x = t$, se tiene la ecuación paramétrica de la recta L , esto es,

$$L: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 5 - 5t \end{cases}$$

Luego, la ecuación vectorial de la recta L es

$$L: P = (0; 2; 5) + t(1; -3; -5), \quad t \in \mathbb{R}$$

Sean $\vec{v} = \overrightarrow{P_0 Q_0} = (2; -3; -2)$ y $\vec{a} = (1; -3; -5)$, donde $P_0(0; 2; 5)$.
Entonces la distancia del punto Q_0 a la recta L es

$$d = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\sqrt{81 + 64 + 9}}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{22}{5}}$$

Ejemplo 34 Halle la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x - y + 2z + 4 = 0$, $2x + y + 3z - 9 = 0$ y es paralelo a la recta cuyos números directores son $[1; 3; -1]$

Solución

La ecuación de la familia de planos que pasan por la intersección de los planos dados es

$$x - y + 2z + 4 + k(2x + y + 3z - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2k)x + (k - 1)y + (2 + 3k)z + 4 - 9k = 0$$

Luego $\vec{N} = (1 + 2k; k - 1; 2 + 3k)$ es el vector normal de la familia. Como el plano es paralelo al vector $\vec{a} = (1; 3; -1)$, entonces $\vec{N} \perp \vec{a} \Leftrightarrow$

$$\vec{N} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2k + 3k - 3 - 2 - 3k = 0 \Rightarrow k = 2$$

Por tanto, la ecuación del plano descrito es

$$5x + y + 8z - 14 = 0$$

Ejemplo 35 Dadas las rectas $L_1: P = (1; 2; -1) + t(1; 3; 1)$, $t \in \mathbb{R}$ y

$$L_2: Q = (5; -1; -2) + s(2; -1; 2), s \in \mathbb{R}$$

Halle las ecuaciones de dos planos paralelos Q_1 y Q_2 de modo que

$$L_1 \subset Q_1 \text{ y } L_2 \subset Q_2$$

Solución

Sea \vec{N} el vector normal común de los planos

$$Q_1 \text{ y } Q_2 \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{a} = (1; 3; 1) \text{ y}$$

$$\vec{N} \perp \vec{b} = (2; -1; 2)$$

Luego, $\vec{N} \parallel \vec{a} \times \vec{b} = (7; 0; -7)$

Si utilizamos, el vector normal $\vec{N} = (1; 0; -1)$ y el punto $P_1(1; 2; -1) \in L_1$ como punto de paso del plano, entonces la ecuación del plano que contiene a la recta L_1 es

$$Q_1: 1(x - 1) + 0(y - 2) - 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow Q_1: x - z - 2 = 0$$

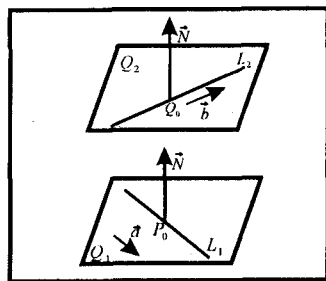


Fig. 6.31

Análogamente, si usamos el vector normal $\vec{N} = (1; 0; -1)$ y el punto $P_2(5; -1; -2) \in L_2$ como punto de paso del plano, entonces la ecuación del plano que contiene a la recta L_2 es

$$Q_2: 1(x - 5) + 0(y + 1) - 1(z + 2) = 0 \Leftrightarrow Q_2: x - z - 7 = 0$$

Ejemplo 36 En cada uno de los siguientes ejercicios, L es una recta y Q es un plano. Determine si L es paralela o no al plano Q y halle $L \cap Q$

- a) $L: P = (1; -1; 2) + t(2; -1; 3), t \in \mathbb{R}$ y $Q: x + 5y + z + 1 = 0$
 b) $L: P = (2; 0; 1) + t(1; 2; -1), t \in \mathbb{R}$ y $Q: x + 2y + 5z - 7 = 0$
 c) $L: P = (3; -1; 0) + t(2; 1; -1), t \in \mathbb{R}$ y $Q: 4x + 2y - 2z + 2 = 0$
 d) $L: P = (1; -1; 1) + t(1; 2; -1), t \in \mathbb{R}$ y $Q: 3x - y - z + 5 = 0$

Solución

Si \vec{d} es el vector dirección de la recta L y \vec{N} es la normal del plano Q , se tiene

a) $\vec{d} = (2; -1; 3)$ y $\vec{N} = (1; 5; 1) \Rightarrow \vec{d} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow L \parallel Q$

Para verificar si $L \cap Q = \emptyset$ ó $L \subset Q$, consideramos un punto $P_0 \in L$ y comprobamos si $P_0 \in Q$ ó $P_0 \notin Q$. Si $P_0 \in Q \Rightarrow L \subset Q$; si $P_0 \notin Q \Rightarrow L \cap Q = \emptyset$. Para determinar si un punto pertenece a un plano es suficiente verificar si sus coordenadas satisfacen o no la ecuación del plano.

Como $P_0(1; -1; 2) \in L$, entonces reemplazando en la ecuación del plano se tiene $1 + 5(-1) + 2 + 1 \neq 0$ (P_0 no satisface la ecuación del plano). Luego $P_0 \notin Q$.

Por tanto $L \cap Q = \emptyset$

b) $L \subset Q$ ó $L \cap Q = L$

c) $L \perp Q$ y $L \cap Q = I(1; -2; 1)$

d) $\vec{d} = (1; 2; -1)$ y $\vec{N} = (3; -1; -1) \Rightarrow \vec{d} \cdot \vec{N} = 3 - 2 + 1 \neq 0$

$$\Rightarrow L \not\parallel Q \Rightarrow L \cap Q = I \text{ (un punto)} \Rightarrow I \in L \wedge I \in Q$$

$$I \in L \Rightarrow I(1 + t; -1 + 2t; 1 - t)$$

$$I \in Q \Rightarrow 3(1 + t) - (-1 + 2t) - (1 - t) + 5 = 0 \Rightarrow t = -4$$

Por consiguiente, $I(-3; -9; 5)$

Ejemplo 37 Por el punto $A(1;0;1)$ se traza una perpendicular al plano $Q: 2x + y - z - 7 = 0$. Si B es el pie de dicha perpendicular, determine un punto C en la recta $L: P = (-1;1;0) + t(0;1;5)$, $t \in \mathbb{R}$ de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D es igual a $4u^3$, donde D es el punto de intersección de la recta L con el plano Q .

Solución

En primer lugar, determinaremos el punto B .

Sea $L_N: P = A + s\vec{N}$, $s \in \mathbb{R}$ la recta que pasa por el punto A y es perpendicular al plano Q . Así,

$$\begin{aligned} B \in L_N \cap Q &\Leftrightarrow B \in L_N \wedge B \in Q \\ &\Leftrightarrow B(1 + 2s; s; 1 - s) \in Q \\ &\Leftrightarrow 2(1 + 2s) + s - (1 - s) - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow s = 1 \end{aligned}$$

De donde resulta $B(3;1;0)$

Como $D = L \cap Q \Leftrightarrow D \in L \wedge D \in Q \Leftrightarrow D(-1;1+t;5t) \in Q$

$$\Leftrightarrow 2(-1) + (1+t) - 5t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

Así, $D(-1;-1;-10)$

Por otro lado, dado que $C \in L \Rightarrow C(-1;1+t;5t)$. Ahora, sean

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = (-4;t;5t), \vec{b} = \overrightarrow{BD} = (-4;-2;-10) \text{ y } \vec{c} = \overrightarrow{BA} = (-2;-1;1)$$

Entonces $\vec{b} \times \vec{c} = (-12;24;0)$ y

$$V_T = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{6} |48 + 24t| = 4 \Leftrightarrow |2 + t| = 1 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = -3$$

Por lo tanto, el punto es $C(-1;0;-5) \vee C(-1;-2;-15)$

Ejemplo 38 Sean $A(3;2;1)$ y $B(-5;1;2)$ dos puntos del espacio. Halle un punto C en el plano $Q: x - y + 2z - 4 = 0$ de modo que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ sea mínimo.

Solución

Para que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ sea mínimo, necesariamente A, B y C deben estar en un plano perpendicular al plano Q . En la Fig. 6.33 se muestra al plano Q de canto. Si B' es el punto simétrico de B respecto al plano Q (*), entonces $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{d_2}$. Luego $\overrightarrow{d_1} + \overrightarrow{d_2}$ es mínimo si C es la intersección de $\overrightarrow{AB'}$ con el plano Q .

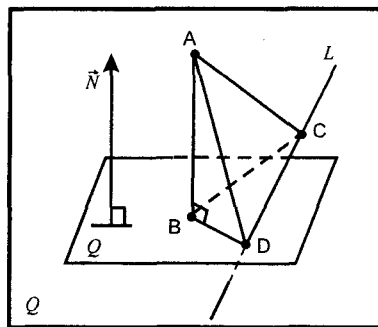


Fig. 6.32

(*) Dos puntos B y B' son simétricos respecto al plano Q , si Q es perpendicular al segmento $\overline{BB'}$ en el punto medio M de $\overline{BB'}$

En primer lugar determinaremos M . Sea

$$L_N: P = B + t(1; -1; 2), t \in \mathbb{R}$$

la recta que pasa por B y es perpendicular al plano Q , entonces $M \in L_N$ y $M \in Q$

$$\Rightarrow M(-5 + t; 1 - t; 2 + 2t) \quad y$$

$$(-5 + t) - (1 - t) + 2(2 + 2t) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(-4; 0; 4)$$

Como M es el punto medio entre B y B' , por la fórmula de punto medio se obtiene

$$B'(-3, -1, 6)$$

Así, la ecuación vectorial de la recta que pasa por A y B' es

$$L: Q = (3; 2; 1) + r(-6; -3; 5), \quad r \in \mathbb{R}$$

Dado que $C = L \cap Q \Rightarrow C \in L$ y $C \in Q$

$$\Leftrightarrow C(3 - 6r, 2 - 3r, 1 + 5r) \wedge (3 - 6r) - (2 - 3r) + 2(1 + 5r) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 1/7$$

Por consiguiente, se tiene $C(15/7; 11/7; 12/7)$.

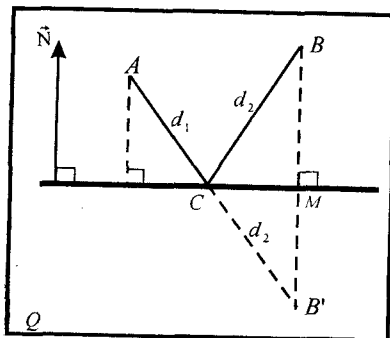


Fig. 6.33

6.3.4 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Sea Q un plano cuya ecuación general es $Q: Ax + By + Cz + D = 0$ y $P_1(x_1; y_1; z_1)$ un punto del espacio. Si d es la distancia del punto P_1 al plano Q (la longitud del segmento perpendicular trazado de P_1 a Q (Fig. 6.34)), entonces

$$d = \|\overrightarrow{P_0P_1}\| |\cos \theta| \quad \dots (\alpha)$$

Donde $P_0(x_0; y_0; z_0)$ es un punto del plano Q y θ es el ángulo entre el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ y el vector normal \vec{N} .

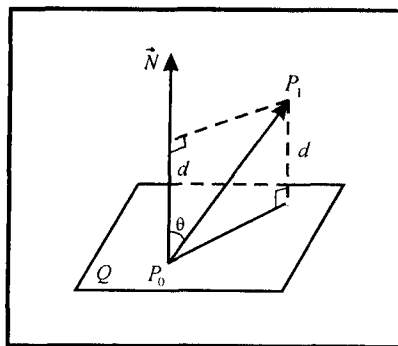


Fig. 6.34

Como $P_0 \in Q \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

De donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ (β)

Por otro lado,

$$\cos \theta = \frac{(\overrightarrow{P_0 P_1}) \cdot \vec{N}}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\| \|\vec{N}\|} \quad (\gamma)$$

Reemplazando (γ) en (α) se obtiene

$$d = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (\lambda)$$

Reemplazando (β) en (λ), la fórmula para la distancia del punto P_1 al plano Q se escribe como

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Observación 17 La distancia d entre los planos paralelos

$$Q_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0 \quad \text{y} \quad Q_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

está dada por la fórmula

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo 39 Calcule la distancia del punto $P_1(1; 2; 3)$ al plano

$$Q: P = (2; 1; -1) + r(1; 1; 1) + s(-1; 1; 0), \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Solución

El vector normal del plano Q es $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b} = (-1; 1; 0) \times (1; 1; 1) = (1; 1; -2)$

Así, la ecuación del plano Q es $1(x - 2) + 1(y - 1) - 2(z + 1) = 0$ ó

$$Q: x + y - 2z - 5 = 0$$

Por tanto, la distancia entre $P_1(1; 2; 3)$ y el plano Q es

$$d = \frac{|1 + 2 - 2(3) - 5|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Ejemplo 40 Encuentre la distancia entre los planos paralelos

$$Q_1: x - 2y + 2z - 5 = 0 \quad \text{y} \quad Q_2: 3x - 6y + 6z - 7 = 0$$

Solución

Para aplicar la fórmula de distancia entre planos paralelos, es necesario que los dos planos tengan el mismo vector normal; con este propósito dividimos la ecuación del plano Q_2 entre 3 y obtenemos las ecuaciones

$$Q_1: x - 2y + 2z - 5 = 0 \quad \text{y} \quad Q_2: x - 2y + 2z - 7/3 = 0$$

En consecuencia, la distancia entre los planos Q_1 y Q_2 es

$$d = \frac{\left| -5 + \frac{7}{3} \right|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{8}{9}$$

Ejemplo 41 La distancia del punto $P(1; 0; 2)$ al plano Q es 1. Si el plano Q pasa por la intersección de los planos $4x - 2y - z + 3 = 0 \wedge 2x - y + z - 2 = 0$, halle la ecuación del plano.

Solución

La ecuación de la familia de planos que pasan por la intersección de los planos dados es

$$Q_F: 4x - 2y - z + 3 + k(2x - y + z - 2) = 0 \quad \text{ó}$$

$$Q_F: (4 + 2k)x - (2 + k)y + (k - 1)z + 3 - 2k = 0$$

Por la condición descrita, la distancia del punto P al plano Q_F resulta

$$1 = \frac{|(4 + 2k) - 2(k - 1) + 3 - 2k|}{\sqrt{(4 + 2k)^2 + (2 + k)^2 + (k - 1)^2}} = \frac{|2k + 5|}{\sqrt{6k^2 + 18k + 21}}$$

$$\Leftrightarrow 6k^2 + 18k + 21 = 4k^2 + 20k + 25$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 - 2k - 4 = 0 \Rightarrow k = -1 \vee k = 2$$

Luego, las ecuaciones del plano Q (hay dos soluciones) son

$$Q_1: 2x - y - 2z + 5 = 0$$

$$Q_2: 8x - 4y + z - 1 = 0$$

Ejemplo 42 Se tiene el punto $P_1(-3; 2; -1)$ y la recta $L: x = 2y = z$. Halle las ecuaciones de dos planos paralelos si se sabe que uno de ellos contiene a P_1 y el otro contiene a L , además, la distancia entre dichos planos es $\sqrt{2}$.

Solución

La ecuación vectorial de la recta L es $L: P = (0; 0; 0) + t(2; 1; 2), \quad t \in \mathbb{R}$

Sea $\vec{N} = (A; B; C)$ el vector normal común de los planos paralelos. Entonces, la ecuación general del plano que contiene al punto $P_1(-3; 2; -1)$ y la del plano que contiene a la recta L son respectivamente

$$Q_1: A(x + 3) + B(y - 2) + C(z + 1) = 0 \quad y$$

$$Q_2: Ax + By + Cz = 0$$

Como el plano Q_2 contiene a la recta L , entonces $\vec{N} = (A; B; C) \perp \vec{a} = (2; 1; 2)$

$$\Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{a} = 2A + B + 2C = 0 \Leftrightarrow B = -2A - 2C \quad (\alpha)$$

Ahora, utilizando la fórmula de la distancia entre dos planos resulta

$$\sqrt{2} = \frac{|3A - 2B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2(A^2 + B^2 + C^2) = (3A - 2B + C)^2 \quad (\beta)$$

Reemplazando (α) en (β) se obtiene

$$10A^2 + 10C^2 + 16AC = 49A^2 + 25C^2 + 70AC$$

$$\Leftrightarrow 13A^2 + 18AC + 5C^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (13A + 5C)(A + C) = 0 \Leftrightarrow A = -C \quad \text{ó} \quad A = -5C/13$$

$$\text{Si } A = -C \Rightarrow B = 0 \Rightarrow \vec{N}_1 = (-C; 0; C) = -C(1; 0; -1)$$

Considerando $\vec{N}_1 = (1; 0; -1)$ se obtiene las soluciones

$$Q_1: x - z + 2 = 0$$

$$Q_2: x - z = 0$$

$$\text{Si } A = -5C/13 \Rightarrow B = -16C/13 \Rightarrow \vec{N}_2 = (-5C/13; -16/13; C)$$

Para $C = -13$ se obtiene $\vec{N}_2 = (5; 16; -13)$. En este caso las soluciones son

$$Q_1: 5x + 16y - 13z - 30 = 0$$

$$Q_2: 5x + 16y - 13z = 0$$

Ejemplo 43 Un plano se encuentra a una distancia de $2/7$ unidades del origen de coordenadas. Halle la ecuación del plano si se sabe que contiene a la recta $L: x = 2y = 3z - 1$.

Solución

La recta L puede ser considerada como la intersección de los planos $x = 2y$ \wedge $x = 3z - 1$. La familia de los planos que pasan por la intersección de estos planos es

$$Q_F: x - 2y + k(x - 3z + 1) = 0 \Leftrightarrow (1 + k)x - 2y - 3kz + k = 0$$

Así, de la distancia del origen de coordenadas al plano Q_F resulta

$$\frac{2}{7} = \frac{|k|}{\sqrt{(1+k)^2 + 4 + 9k^2}} \Leftrightarrow 40k^2 + 8k + 20 = 49k^2$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \quad \text{ó} \quad k = -10/9$$

Por tanto, existen dos soluciones al problema y estas son

$$Q_1: 3x - 2y - 6z + 2 = 0 \quad (\text{para } k = 2)$$

$$Q_2: x + 18y - 30z + 10 = 0 \quad (\text{para } k = -10/9)$$

6.3.5 ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

Dos planos no paralelos Q_1 y Q_2 forman dos ángulos (diedros) θ y $180^\circ - \theta$ (Fig. 6.35), luego es suficiente conocer uno de los ángulos. Uno de estos ángulos es igual al ángulo que forman sus normales. Si θ es este ángulo, entonces

$$\cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_2\|}$$

donde \vec{N}_1 y \vec{N}_2 son respectivamente, los vectores normales de los planos Q_1 y Q_2 .

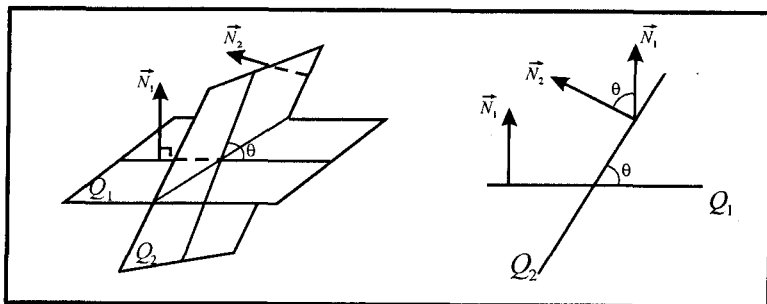


Fig. 6.35

Ejemplo 44 Halle el ángulo obtuso que forman los planos

$$Q_1: 2x - y + z - 4 = 0 \quad \text{y} \quad Q_2: x + y + 2z - 5 = 0$$

Solución

Los vectores normales de los planos Q_1 y Q_2 son respectivamente

$$\vec{N}_1 = (2; -1; 1) \quad \text{y} \quad \vec{N}_2 = (1; 1; 2)$$

Entonces

$$\cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_2\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = 60^\circ$$

Luego, el ángulo obtuso entre los planos es $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Ejemplo 45 Halle la ecuación del plano perpendicular al plano yz , que forma un ángulo $\theta = \arccos(2/3)$ radianes con el plano $Q_2: 2x - y + 2z - 3 = 0$ y pasa por el punto $P_1(0; 1; 1)$

Solución

Sean $\vec{N} = (A; B; C)$ el vector normal del plano buscado, $\vec{N}_1 = (1; 0; 0)$ el vector normal del plano yz ($x = 0$) y $\vec{N}_2 = (2; -1; 2)$ el vector normal del plano Q_2

Como el plano buscado es perpendicular al plano yz ($\vec{N} \perp \vec{N}_1$) y forma un ángulo θ con el plano Q_2 , entonces se tiene

$$\vec{N} \cdot \vec{N}_1 = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (1)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{N} \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}\| \|\vec{N}_2\|} = \frac{2A - B + 2C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{9}} \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) se obtiene

$$\frac{2}{3} = \frac{2C - B}{3\sqrt{B^2 + C^2}}$$

De donde $4(B^2 + C^2) = 4C^2 - 4BC + B^2 \Leftrightarrow 3B^2 + 4BC = B(3B + 4C) = 0$

$$\Leftrightarrow B = 0 \quad \text{ó} \quad B = -4C/3$$

Si $B = 0$ entonces $\vec{N} = (0; 0; C) = C(0; 0; 1)$. Luego, la ecuación buscada del plano que pasa por el punto $P_1(0; 1; 1)$ es

$$Q_1: 0(x - 0) + 0(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \quad \text{ó} \quad Q_1: z = 1$$

Si $B = -4C/3$, entonces $\vec{N} = (0; -4C/3; C) = -(C/3)(0; 4; -3)$. Luego, la ecuación buscada del plano que pasa por el punto $P_1(0; 1; 1)$ es

$$Q_3: 0(x - 0) + 4(y - 1) - 3(z - 1) = 0 \quad \text{ó} \quad Q_3: 4y - 3z - 1 = 0$$

6.3.6 PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO

Sea P un punto del espacio y Q un plano. Se dice que el punto $P' \in Q$ es la proyección (ortogonal) del punto P sobre el plano Q si $\overline{PP'} \perp Q$ (Fig. 6.36).

Sea L una recta y Q un plano. A la recta contenida en Q , que se obtiene proyectando los puntos de la recta L se denomina **recta de proyección de L sobre el plano Q** . A esta recta se denota con L_Q (Fig. 6.37). Si L es perpendicular al plano Q , la proyección de L sobre Q se reduce a un punto.

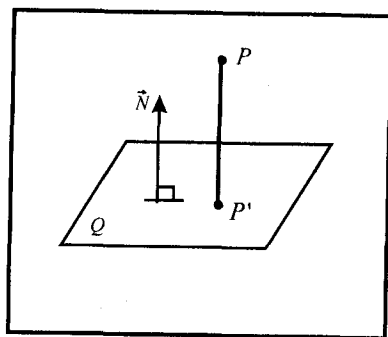


Fig. 6.36

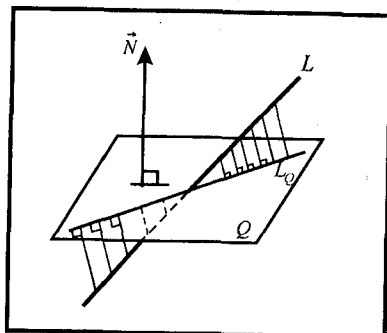


Fig. 6.37

Ejemplo 46 En los siguientes ejercicios, L es una recta y Q es un plano. Determine la proyección de L sobre Q .

- a) $L: P = (2; -1; 4) + t(2; 1; 1), t \in \mathbb{R}, Q: 2x + y + z - 25 = 0$
 b) $L: P = (1; 2; 1) + t(1; -1; 2), t \in \mathbb{R}, Q: x - y - z - 4 = 0$
 c) $L: P = (2; 1; -1) + t(2; -1; 1), t \in \mathbb{R}, Q: x + 3y - z + 16 = 0$

Solución

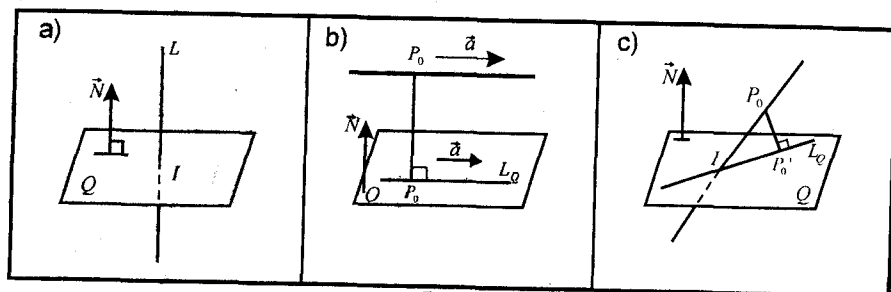


Fig. 6.38

- a) Los vectores dirección de la recta L y el plano Q son respectivamente $\vec{a} = (2; 1; 1)$ y $\vec{N} = (2; 1; 1)$ entonces $L \perp Q$. Luego, la proyección de L sobre Q se reduce al punto $I = L \cap Q$ (Fig. 6.38a). Al hallar la intersección de la recta L con el plano Q , obtenemos $I(8; 2; 7)$

- b) Análogamente tenemos

$\vec{a} = (1; -1; 2)$ y $\vec{N} = (1; -1; -1) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow L \parallel Q$. Por ser $L \parallel Q$ será suficiente proyectar un punto de L y considerar al vector \vec{a} como el vector dirección de L_Q (Fig. 6.38 b).

Sean $P_0(1; 2; 1) \in L$ y L_N la recta que pasa por P_0 en la dirección de \vec{N} . Así, la ecuación vectorial de la recta L_N es

$$L_N: P = (1; 2; 1) + s(1; -1; -1), \quad s \in \mathbb{R}$$

Ahora, si P'_0 es la proyección de P_0 sobre el plano Q , entonces $P'_0 = L_N \cap Q$. Al resolver la intersección de L_N con Q se obtiene $P'_0(3; 0; -1)$

Por lo tanto, $L_Q: R = (3; 0; -1) + \lambda(1; -1; 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

c) En este caso, tenemos

$\vec{a} = (2; -1; 1)$ y $\vec{N} = (1; 3; -1)$, entonces L no es paralela ni perpendicular al plano Q (Fig. 6.38 c). Para hallar la recta L_Q será suficiente hallar $I = L \cap Q$ y proyectar el punto $P_0(2; 1; -1)$ sobre el plano Q . Al hallar $I = L \cap Q$, se obtiene $I(24; -10; 10)$. Al proyectar el punto $P_0(2; 1; -1)$ sobre el plano Q se obtiene $P'_0(0; -5; 1)$.

Luego L_Q es la recta que pasa por los puntos I y P'_0 . Por tanto,

$$L_Q: R = (24; -10; 10) + \lambda(24; -5; 9)$$

6.3.8 ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

Sea L una recta con vector dirección \vec{a} y Q un plano cuyo vector normal es \vec{N} .

El ángulo entre la recta L y el plano Q se define como el ángulo que forma L con L_Q , donde L_Q es la proyección de L sobre Q (Fig. 6.39).

Si α es uno de los ángulos que forma L con Q (El otro ángulo es $180^\circ - \alpha$), entonces $\theta + \alpha = 90^\circ$, donde θ es el ángulo que forman el vector \vec{N} y el vector \vec{a} . Luego,

$$\text{sen } \alpha = \cos \theta = \frac{\vec{N} \cdot \vec{a}}{\|\vec{N}\| \|\vec{a}\|}$$

Por lo tanto, la fórmula para hallar el ángulo entre las rectas L y el plano Q es

$$\text{sen } \alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{a}}{\|\vec{N}\| \|\vec{a}\|}$$

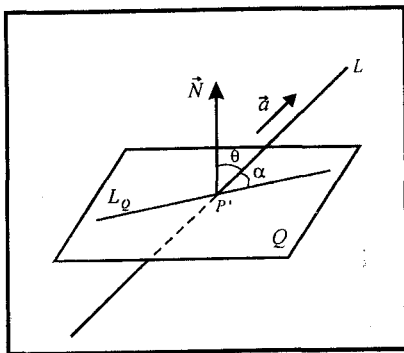


Fig. 6.39

Ejemplo 47 Halle el ángulo agudo que forman el plano $Q: 2x + y + z - 5 = 0$ con la recta $L: P = (2; 3; 5) + t(1; -1; 2), t \in \mathbb{R}$

Solución

En este caso los vectores dirección de la recta L y del plano Q son respectivamente $\vec{a} = (1; -1; 2)$ y $\vec{N} = (2; 1; 1)$. Luego, si α es el ángulo que forma la recta L con el plano Q , tenemos

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{a}\| \|\vec{N}\|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Por tanto, el ángulo agudo que forman L y Q es de 30°

Ejemplo 48 Sean $L': P = (1; 0; 0) + t(0; 1; 1), t \in \mathbb{R}$ una recta y

$Q: x - z = 0$ un plano. Si L'_Q es la proyección de L' sobre Q , halle la ecuación de la recta que pasa por $L' \cap Q$, forma un ángulo de 45° con L'_Q y está contenida en el plano Q .

Solución

Sea L la recta buscada (Fig. 6.40). Como $I = L \cap Q = L' \cap Q$, entonces se obtiene $I(1; 1; 1)$. Al hacer las operaciones correspondientes para proyectar L' sobre el plano Q , obtenemos

$$L'_Q: P = (1; 1; 1) + s(1; 2; 1), s \in \mathbb{R}$$

Sea $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ el vector dirección de L . Como la recta L está contenida en el plano Q y forma un ángulo de 45° con la recta L'_Q , tenemos

$$\vec{a} \cdot \vec{N}_Q = 0 \Rightarrow a_1 = a_3 \quad (1)$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot (1; 2; 1)}{\sqrt{6} \|\vec{a}\|} = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{\sqrt{6} \|\vec{a}\|} \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2(a_1 + a_2)}{\sqrt{6}\sqrt{2a_1^2 + a_2^2}} \Rightarrow a_2^2 + 8a_1a_2 - 2a_1^2 = 0 \Rightarrow a_2 = (-4 \pm 3\sqrt{2})a_1$$

Así, el vector dirección de la recta L es

$$\vec{a} = (a_1; (-4 \pm 3\sqrt{2})a_1; a_1) = a_1(1; -4 \pm 3\sqrt{2}; 1)$$

Por tanto, la ecuación buscada de la recta es

$$L: R = (1; 1; 1) + \lambda(1; -4 \pm 3\sqrt{2}; 1), \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Dos soluciones})$$

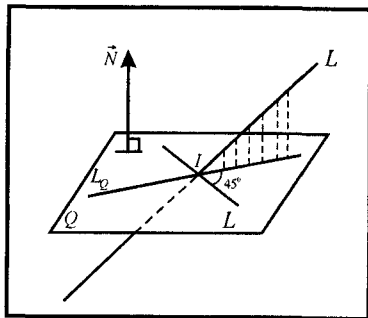


Fig. 6.40

Ejemplo 49 Sea $Q: x - y - 1 = 0$ un plano. Halle la ecuación de la recta L que pasa por $A(0; -1; 0)$ de modo que $L_Q: P = (0; -1; 0) + t(0; 0; 1), t \in \mathbb{R}$ sea la proyección de L sobre Q . Se sabe que el ángulo entre L y Q es de 45° .

Solución

Se observa que el punto A pertenece a la recta L_Q (Fig. 6.41).

Sea $\vec{d} = (a; b; c)$ el vector dirección de L . Como la recta L forma un ángulo de 45° tanto con la recta L_Q como con el plano Q , entonces tenemos

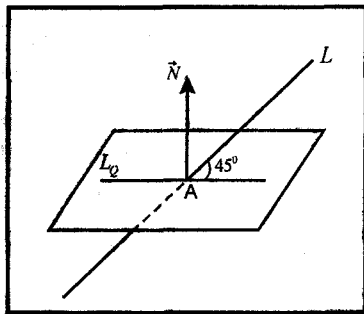


Fig. 6.41

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{d} \cdot (0; 0; 1)}{\|\vec{d}\|} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{\vec{d} \cdot (1; -1; 0)}{\sqrt{2}\|\vec{d}\|} = \frac{a - b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos

$$a^2 + b^2 = -2ab \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$$

Reemplazando $b = -a$ en (1) obtenemos $c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}a$

Así, el vector dirección de la recta L es $\vec{d} = (a; -a; \pm\sqrt{2}a) = a(1; -1; \pm\sqrt{2})$

Por consiguiente, las ecuaciones buscadas de la recta L son

$$L: R = (0; -1; 0) + \lambda(1; -1; \pm\sqrt{2}), \lambda \in \mathbb{R}$$

6.3.9 DISTANCIA MÍNIMA ENTRE RECTAS

Sean $L_1: P = P_0 + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$ y $L_2: Q = Q_0 + s\vec{b}, s \in \mathbb{R}$ dos rectas en el espacio.

Las dos posiciones relativas de estas rectas son

i) $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

ii) $L_1 \nparallel L_2 \Leftrightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}$

Si $L_1 \parallel L_2$, la distancia entre estas rectas está dada por $d = d(Q_0; L_1)$, distancia de Q_0 a la recta L_1 ó $d = d(P_0; L_2)$, distancia de P_0 a la recta L_2 (Fig. 6.42).

Si las rectas se cruzan ($L_1 \nparallel L_2$), la distancia mínima d es la longitud del segmento perpendicular común comprendida entre ambas rectas (Fig. 6.43).

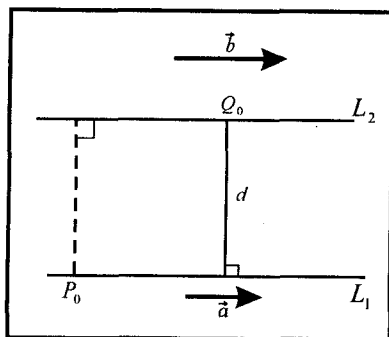


Fig. 6.42

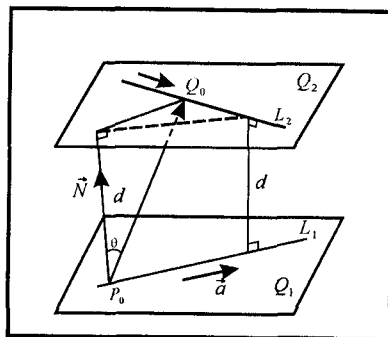


Fig. 6.43

Si las rectas L_1 y L_2 se cruzan existen dos planos paralelos Q_1 y Q_2 , tales que $L_1 \subset Q_1$ y $L_2 \subset Q_2$. Luego d es la distancia entre los planos Q_1 y Q_2 .

Sea $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$ y θ el ángulo entre \vec{N} y $\vec{C} = \overrightarrow{P_0 Q_0}$, entonces

$$d = \|\vec{C}\| |\cos \theta|$$

Dado que $\cos \theta = \frac{\vec{C} \cdot \vec{N}}{\|\vec{C}\| \|\vec{N}\|}$, la fórmula de distancia entre rectas que se cruzan se escribe como

$$d = \frac{|\vec{C} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = |\vec{C} \cdot \vec{u}_N|$$

donde \vec{u}_N es el vector unitario en la dirección del vector \vec{N}

Observación 18 Si L_1 y L_2 son dos rectas y d es la distancia mínima entre ellas, entonces

- i) Si $L_1 \parallel L_2$, $d(L_1; L_2) = 0 \Leftrightarrow L_1 = L_2$
- ii) Si $L_1 \nparallel L_2$, $d(L_1; L_2) = 0 \Leftrightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ (la intersección es un punto)

Ejemplo 50 Halle la distancia mínima entre las rectas

$$L_1: P = (1; 1; 4) + t(0; 1; -3), t \in \mathbb{R} \quad y$$

$$L_2: x = 4 + t, \quad y = 5, \quad z = -3 + 2t$$

Solución

El punto de paso y el vector dirección de L_1 son $P_0(1; 1; 4)$ y $\vec{a} = (0; 1; -3)$.

El punto de paso y el vector dirección de L_2 son $Q_0(4; 5; -3)$ y $\vec{b} = (0; 1; -3)$

Así, tenemos $\vec{a} \times \vec{b} = (2; -3; -1)$ y $\vec{C} = \overrightarrow{P_0Q_0} = (3; 4; -7)$

Por lo tanto, la distancia mínima entre las rectas L_1 y L_2 es

$$d = \frac{|\vec{C} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{|6 - 12 + 7|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Ejemplo 51 Una esfera metálica es soltada en el punto $A(1; 2; 10)$ y cae (verticalmente) hasta el plano $Q: 2x + y + z - 12 = 0$; luego resbala por él hasta chocar con el plano xy . Halle la distancia total recorrida por la esfera.

Solución

La distancia total recorrida por la esfera es

$$d = |\overline{AB}| + d(B; L_i)$$

donde B es la intersección de la recta $L: P = (1; 2; 10) + t(0; 0; 1), t \in \mathbb{R}$ con el plano Q y L_i es la recta de intersección de los planos Q y xy (Fig. 6.44).

Como $B = L \cap Q$, entonces $B(1; 2; 8)$ y $|\overline{AB}| = \sqrt{0 + 0 + 4} = 2$

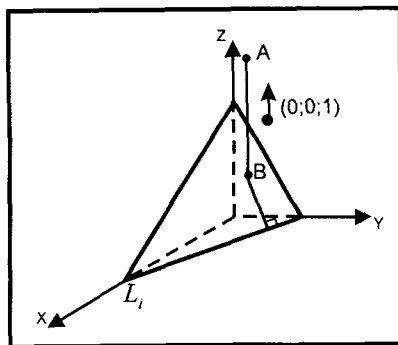


Fig. 6.44

Por otro lado, la ecuación de la recta L_i es

$$L_i: \begin{cases} 2x + y + z - 12 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L_i: P = (0; 12; 0) + \lambda(1; -2; 0), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Luego, } d(B; L_i) = \frac{\|\vec{a} \times \overrightarrow{P_0B}\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\|(1; -2; 0) \times (1; -10; 8)\|}{\sqrt{5}} = 8\sqrt{6/5}$$

Por tanto, la distancia total recorrida por la esfera es

$$d = |\overline{AB}| + d(B; L_i) = 2 + 8\sqrt{6/5}$$

Ejemplo 52 Por la recta $L: P = (4; 2; -3) + t(1; 0; 1)$ pasa un plano cuyas intersecciones con los planos coordenados xy e yz forman un ángulo de 60° . Halle la ecuación del plano.

Solución

Sea $\vec{N} = (A; B; C)$ el vector normal del plano buscado Q . Como el plano Q contiene a la recta L , entonces

$$P_0(4; 2; -3) \in Q \text{ y } \vec{N} \cdot \vec{a} = (A; B; C) \cdot (1; 0; 1) = A + C = 0 \Leftrightarrow C = -A \quad (\alpha)$$

Por otro lado, las rectas intersección del plano $Q: Ax + By + Cz + D = 0$ con los planos xy e yz son respectivamente

$$L_1: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ y } L_2: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ahora, si \vec{a} y \vec{b} son los vectores dirección de las rectas L_1 y L_2 respectivamente, entonces

$$\vec{a} = \vec{N} \times \vec{k} = (A; B; C) \times (0; 0; 1) = (B; -A; 0) \text{ y}$$

$$\vec{b} = \vec{N} \times \vec{i} = (A; B; C) \times (1; 0; 0) = (0; C; -B)$$

Dado que las rectas L_1 y L_2 forman un ángulo de 60° , entonces tenemos

$$\cos 60^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-AC}{\sqrt{B^2 + A^2} \sqrt{C^2 + B^2}} \quad (\beta)$$

Reemplazando (α) en (β) se obtiene

$$\frac{1}{2} = \frac{A^2}{B^2 + A^2} \Leftrightarrow B^2 = A^2 \Leftrightarrow B = \pm A$$

Así, el problema tiene dos soluciones

$$\text{Si } B = A \Rightarrow \vec{N}_1 = (A; A; -A) = A(1; 1; -1)$$

$$\text{Si } B = -A \Rightarrow \vec{N}_2 = (A; -A; -A) = A(1; -1; -1)$$

Luego, las ecuaciones de los planos que satisfacen las condiciones del problema son

$$Q_1: 1(x - 4) + 1(y - 2) - 1(z + 3) = 0 \text{ ó } x + y - z - 9 = 0$$

$$Q_2: 1(x - 4) - 1(y - 2) - 1(z + 3) = 0 \text{ ó } x - y - z - 5 = 0$$

Ejemplo 53 Sean P , Q , R y S los vértices consecutivos de un cuadrado contenido en el plano $Q_1: 2x + 2y - z - 10 = 0$. Si $P(2; 9; 12)$ y $R(-2; 11; 8)$ son los extremos de una de las diagonales del cuadrado, halle las coordenadas de los vértices Q y S .

Solución

En la figura 6.45, el punto medio del cuadrado es $M(0; 10; 10)$,

$$\overrightarrow{PR} = (-4; 2; -4) \text{ y } \|\overrightarrow{PR}\| = 6$$

Ahora, si \vec{a} es el vector dirección de la recta L que contiene a la diagonal \overline{QS} , entonces

$$\vec{a} \perp \overrightarrow{PR} \wedge \vec{a} \perp \vec{N}_{Q_1} \Rightarrow \vec{a} \parallel \overrightarrow{PR} \times \vec{N}_{Q_1} = 6(1; -2; -2)$$

Así, la ecuación vectorial de la recta L es

$$L: (x; y; z) = (0; 10; 10) + t(1; -2; -2), t \in \mathbb{R}$$

Como $Q \in L$, entonces $Q(t; 10 - 2t; 10 - 2t)$. Dado que,

$$\|\overrightarrow{QM}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{PR}\| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 4t^2 + 4t^2} = 3 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

Por tanto, las coordenadas buscadas de los puntos son $Q(1; 8; 8)$ y $S(-1; 12; 12)$

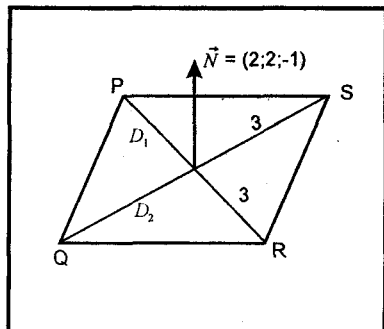


Fig. 6.45

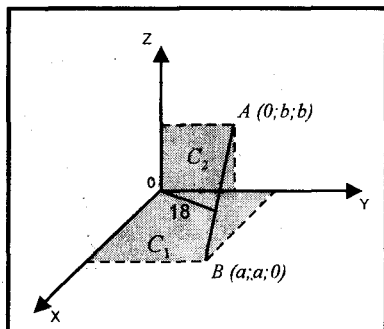


Fig. 6.46

Ejemplo 54 Una recta L , interseca a los planos coordenados xy e yz , de tal manera que el segmento comprendido entre los puntos de intersección está en el primer octante. Si desde dichas intersecciones se trazan perpendiculares a los ejes coordenados, quedan determinados los cuadrados C_1 y C_2 respectivamente. El área de C_1 es el cuádruple del área de C_2 . Halle la ecuación vectorial de la recta L si su distancia al origen es 18.

Solución

Sean $A(0; b; b)$ el punto de intersección de L con el plano yz y $B(a; a; 0)$ el punto de intersección de L con el plano xy ($a > 0, b > 0$). Como el área de C_1 es cuatro veces el área de C_2 (Fig. 6.46), entonces tenemos

$$A(C_1) = a^2 = 4A(C_2) = 4b^2 \Rightarrow a = 2b$$

Así, el vector dirección de L es $\overrightarrow{AB} = (2b; b; -b) = b(2; 1; -1)$ y la ecuación vectorial de esta recta es $L: P = (0; b; b) + \lambda(2; 1; -1), \lambda \in \mathbb{R}$

Utilizando la fórmula de distancia del punto $O(0; 0; 0)$ a la recta L , tenemos

$$18 = d(O; L) = \frac{\|\overrightarrow{OA} \times (2; 1; -1)\|}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow b = 9\sqrt{2}$$

Por lo tanto, la ecuación vectorial buscada de la recta es

$$L: P = (0; 9\sqrt{2}; 9\sqrt{2}) + \lambda(2; 1; -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 55 Una recta L que pasa por el punto $A(2; 2; 2)$, es paralela al plano cuya ecuación es $Q: x + 2y + 4z - 4 = 0$. Halle la ecuación vectorial de la recta L si el área del triángulo AOB es igual a $\sqrt{14}u^2$, donde O es el origen de coordenadas y B es la intersección de L con el plano coordenado yz .

Solución

Sean $B(0; a; b)$ el punto de intersección de L con el plano yz (Fig. 6.47) y $\vec{a} = \overrightarrow{BA} = (2; 2 - a; 2 - b)$ el vector dirección de L .

Como $L \parallel Q$, entonces $\vec{a} \perp \vec{N}_Q$. De donde tenemos

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{N}_Q &= \vec{a} \cdot (1; 2; 4) \\ &= 2 + 2(2 - a) + 4(2 - b) = 0 \\ &\Rightarrow a = 7 - 2b \quad (\alpha)\end{aligned}$$

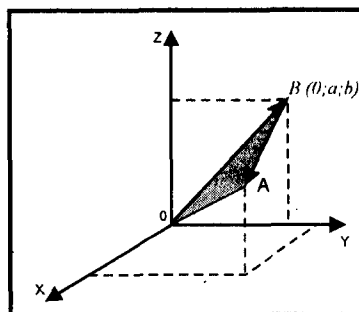


Fig. 6.47

Por otro lado, utilizando la fórmula del área de un triángulo tenemos

$$\begin{aligned}A_{\Delta} &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| = \frac{1}{2} \|(2; 2; 2) \times (0; a; b)\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{8a^2 + 8b^2 - 8ab} = \sqrt{14} \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab = 7 \quad (\beta)\end{aligned}$$

Reemplazando (α) en (β) se obtiene

$$b^2 - 5b + 6 = 0 \Leftrightarrow (b - 2)(b - 3) = 0 \Leftrightarrow b = 2 \vee b = 3$$

Por consiguiente, tenemos

Si $b = 2 \Rightarrow B(0; 3; 2)$ y $L_1: P = (2; 2; 2) + t(2; -1; 0), t \in \mathbb{R}$

Si $b = 3 \Rightarrow B'(0; 1; 3)$ y $L_2: P = (2; 2; 2) + s(2; 1; -1), s \in \mathbb{R}$

Ejemplo 56 Un plano pasa por el punto $E(2; 0; 0)$ y es paralelo a la recta

$$L: P = (5; 6; 1) + t(0; 1; -1), t \in \mathbb{R}$$

Si el plano interseca a los ejes z y y en los puntos F y G respectivamente, halle la ecuación del plano si se sabe que el área del triángulo EFG es igual a $(3/2)u^2$ (dos soluciones).

Solución

Sea Q el plano que interseca al eje z en $G(0; 0; c)$ y al eje y en $F(0; b; 0)$ (Fig. 6.48). Entonces, tenemos

$$\vec{a} = \overrightarrow{EF} = (-2; b; 0), \quad \vec{b} = \overrightarrow{EG} = (-2; 0; c) \quad \text{y} \quad \vec{N}_Q = \vec{a} \times \vec{b} = (bc; 2c; 2b)$$

Dado que

$$\begin{aligned} Q \parallel L &\Rightarrow \vec{N}_Q \perp \vec{d} \Rightarrow \vec{N}_Q \cdot \vec{d} = (bc; 2c; 2b) \cdot (0; 1; -1) = 2c - 2b = 0 \\ &\Rightarrow b = c \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Por otro lado, utilizando la fórmula del área de un triángulo obtenemos

$$\begin{aligned} A_{\Delta} &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EG}\| = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + 4c^2 + 4b^2} = \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow b^2 c^2 + 4c^2 + 4b^2 = 9 \end{aligned} \quad (\beta)$$

Reemplazando (α) en (β) resulta

$$c^4 + 8c^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (c^2 - 1)(c^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow c = \pm 1$$

Por lo tanto, las ecuaciones de los planos que satisfacen las condiciones del problema son

$$\text{Si } c = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \vec{N}_Q = (1; 2; 2) \quad \text{y} \quad Q_1: x + 2y + 2z - 2 = 0$$

$$\text{Si } c = -1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow \vec{N}_Q = (1; -2; -2) \quad \text{y} \quad Q_2: x - 2y - 2z - 2 = 0$$

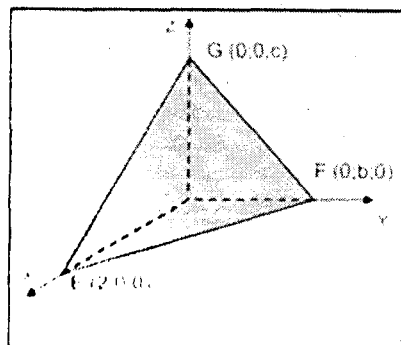


Fig. 6.48

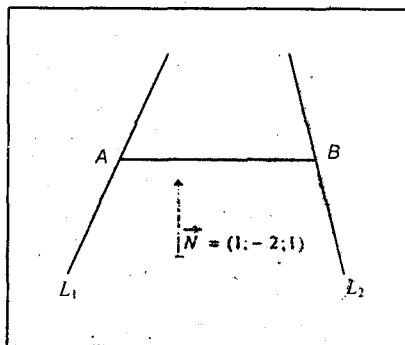


Fig. 6.49

Ejemplo 57 Sean las rectas L_1 : Eje z , L_2 : $x = 3$; $z = 4$. Halle la longitud del menor segmento que es paralelo al plano Q : $x - 2y + z - 2 = 0$ y une a las rectas L_1 y L_2

Solución

Un bosquejo del problema se muestra en la Fig. 6.49. Las ecuaciones vectoriales de las rectas L_1 y L_2 son

$$L_1: P = (0; 0; t), t \in \mathbb{R} \quad y \quad L_2: Q = (3; 0; 4) + s(0; 1; 0), s \in \mathbb{R}$$

Sean $A \in L_1$ y $B \in L_2$, entonces $A(0; 0; t)$ para algún valor de $t \in \mathbb{R}$ y $B(3; s; 4)$ para algún valor de $s \in \mathbb{R}$.

Como $\overline{AB} = (3; s; 4 - t)$ es paralelo al plano Q , entonces tenemos

$$\overline{AB} \perp \overline{N_Q} = (1; -2; 1) \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{N_Q} = 3 - 2s + 4 - t = 0 \Rightarrow t = 7 - 2s$$

Así, la longitud del menor segmento es

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{9 + s^2 + (2s - 3)^2} = \sqrt{18 - 2s + 5s^2} = f(s)$$

Para encontrar el valor de s que hace mínimo a $f(s)$, derivamos con respecto a s y tenemos

$$f'(s) = \frac{5s - 6}{\sqrt{18 - 12s + 5s^2}} = 0 \Rightarrow s = \frac{6}{5}$$

El criterio de la primera derivada confirma que $f(s)$ es mínimo cuando $s = 6/5$ y los puntos son $A(0; 0; 23/5)$ y $B(3; 6/5; 4)$.

Por lo tanto, la longitud del menor segmento es $\|\overline{AB}\| = 3\sqrt{6/5} = 3,286\dots$

Ejemplo 58 Halle la ecuación de la recta L que pasa por el punto $A(3; 4; -5)$, corta a la recta $L_1: Q = (1; 3; -2) + t(4; 3; 2)$, $t \in \mathbb{R}$ y es perpendicular a la recta $L_2: \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{3}, z = 5$

Solución

Sea $B \in L_1$, entonces $B(1 + 4t; 3 + 3t; 2t - 2)$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Como el vector dirección $\vec{a} = \overline{AB} = (4t - 2; 3t - 1; 2t + 3)$ de L es perpendicular al vector dirección $\vec{b} = (2; 3; 0)$ de L_2 , entonces

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2(4t - 2) + 2(3t - 1) \\ &= 17t - 7 = 0 \Rightarrow t = 7/17 \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de la recta L es

$$L: P = (3; 4; -5) + \lambda(-6; 4; 65), \lambda \in \mathbb{R}$$

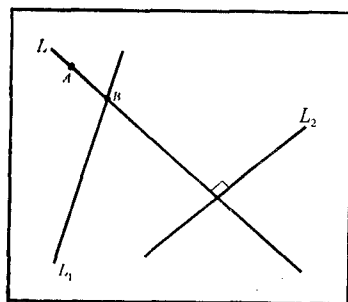


Fig. 6.50

Ejemplo 59 Halle la ecuación del plano que pasa por $P_0(5; 0; -2)$ y forma un ángulo de 30° con el eje z . (dos soluciones).

Solución

Sea $\vec{N} = (A; B; C)$ el vector normal del plano Q que pasa por $P_0(5; 0; -2)$. Entonces su ecuación es

$$Q: A(x - 5) + By + C(z + 2) = 0 \quad (*)$$

Como el ángulo que forma el plano Q con el eje z es 30° (Fig. 6.51), entonces

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{|(A; B; C) \cdot (0; 0; 1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Leftrightarrow 3C^2 = A^2 + B^2 \quad (\alpha)$$

Por otro lado, si $V(0; 0; z_0)$ es el punto de intersección del plano Q con el eje z , entonces $\vec{P_0V} = (-5; 0; z_0 + 2)$ y el eje z forman un ángulo de 30° . Luego,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \frac{|\vec{P_0V} \cdot (0; 0; 1)|}{\|\vec{P_0V}\|} \Leftrightarrow z_0 = 2 \pm 5\sqrt{3} \quad (\beta)$$

Dado que $V(0; 0; z_0) \in Q$, entonces satisface la ecuación (*), esto es

$$-5A + C(z_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow -5A + C(-2 \pm 5\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow A = \pm\sqrt{3}C \quad (\gamma)$$

Reemplazando (γ) en (α) se deduce que $B = 0$. De este modo, el vector normal del plano Q es $\vec{N} = (\pm\sqrt{3}C; 0; C) = C(\pm\sqrt{3}; 0; 1)$

Por consiguiente, la ecuación buscada del plano Q resulta

$$Q: \pm\sqrt{3}x + z + 2 \mp 5\sqrt{3} = 0$$

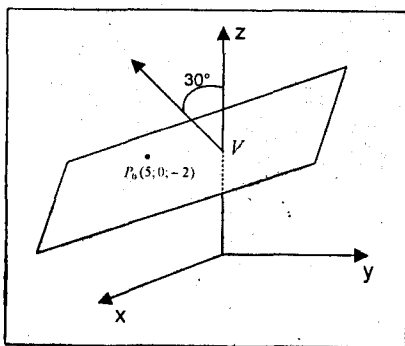


Fig. 6.51

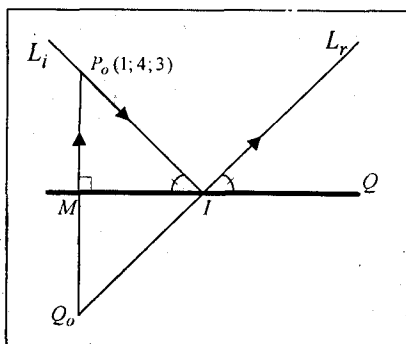


Fig. 6.52

Ejemplo 60 Un rayo luminoso $L_i: P = (1; 4; 3) + t(1; 2; -1), t \in \mathbb{R}$ incide en el espejo plano $Q: 3x - y + 4z - 2 = 0$ y se refleja; halle la ecuación del rayo reflejado.

Solución

Sea $I = L_i \cap Q$ (en la Fig. 6.52, el plano Q se muestra de canto).

Luego,

$$I(1+t; 4+2t; 3-t) \in Q \Leftrightarrow 3(1+t) - (4+2t) + 4(3-t) = 2 \Leftrightarrow t = 3 \\ \Rightarrow I(4; 10; 0)$$

Ahora, la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto P_0 y sigue la dirección del vector normal es $L_N: P = (1; 4; 3) + \lambda(3; -1; 4), \lambda \in \mathbb{R}$

Si $M = L_N \cap Q$, entonces al hacer las operaciones respectivas obtenemos

$$M\left(-\frac{1}{26}; \frac{113}{26}; \frac{42}{26}\right)$$

Dado que M es el punto medio del segmento $\overline{P_0Q_0}$, entonces el punto Q_0 es

$$Q_0\left(-\frac{14}{13}; \frac{61}{13}; \frac{3}{13}\right)$$

Por tanto, la ecuación vectorial del rayo reflejado que pasa por el punto I y sigue

la dirección del vector $\vec{b} = \overrightarrow{Q_0I} = \frac{1}{13}(66; 69; -3)$ es

$$L_r: R = (4; 10; 0) + r(66; 69; -3), \quad r \in \mathbb{R}$$

EJERCICIOS

1. Halle la ecuación de la recta que pasa por $(1; 3; 2)$, es paralelo al plano $Q: P = (1; 4; 0) + r(1; 1; 1) + s(0; 1; 2)$, $r, s \in \mathbb{R}$ y forma un ángulo de 60° con la recta $L_1: R = (1; -2; 3) + t(0; 1; 0)$, $t \in \mathbb{R}$

$$R. L: = (1; 3; -2) + t(3 \pm 2\sqrt{2}; 2 \pm \sqrt{2}; 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Halle la ecuación del plano que pasa por $(3; 1; -2)$ y forma ángulos iguales con las rectas $L_1: P = (1; 4; 2) + t(1; 1; 1)$, $t \in \mathbb{R}$, L_2 : eje x y L_3 : eje y

$$R. (x-3) + (y-1) + (\sqrt{3}-2)(z+2) = 0$$

3. Sean las rectas:

$$L_1: P = (3; 0; 0) + t(1; -1; 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$L_2: Q = (2; 9; 1) + s(1; 3; -1), \quad s \in \mathbb{R}$$

Halle la ecuación del plano que es paralelo a L_1 y L_2 , y divide en 2 partes iguales al segmento de menor longitud que une a dichas rectas.

4. Sea el plano con ecuación $2x + 3y + z + 4 = 0$, encontrar n y m no nulos de manera que los dos vectores $A = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ y $B = n\vec{j} + m\vec{k}$ están en un plano perpendicular al dado.

$$R. m = 1/2, \quad n = -1/2$$

5. $L_1: P = (1; 2; -3) + t(1; -1; 5), t \in \mathbb{R}$

$L_2: Q = (0; 1; 4) + s(1; 0; -1), s \in \mathbb{R}$

son dos rectas, ¿se intersecan?. En caso afirmativo, halle el punto de intersección y la ecuación del plano que los contiene. En caso contrario, halle la distancia mínima entre L_1 y L_2

6. Halle la ecuación del plano paralelo al plano $2x - y + 2z + 4 = 0$ si se sabe que el punto $P_0(3; 2; -1)$ equidista de ambos planos.

R. $2x - y + 2z - 8 = 0$

7. Dadas las rectas $L_1: P = (1; -1; 1) + t(0; 1; 1), t \in \mathbb{R}$

$L_2: Q = (0; 1; 0) + s(1; 0; -1), s \in \mathbb{R}$

Halle las ecuaciones de dos planos paralelos Q_1 y Q_2 de modo que $L_1 \subset Q_1$ y $L_2 \subset Q_2$. ¿Cuál es la distancia entre Q_1 y Q_2 ?

8. Halle la ecuación del plano perpendicular al plano $z = 2$, que pasa por el punto $P_0(2; 2; 2)$ y que forma un ángulo de 60° con el plano

$\sqrt{3}x + 2y - 3z + 2 = 0$

R. $4\sqrt{3}x + y - 2(1 + 4\sqrt{3}) = 0$

9. Dadas las rectas:

$L_1: P = (1; 2; -1) + t(2; -2; -3), t \in \mathbb{R}$

$L_2: Q = (2; 3; 1) + s(1; 2; -1), s \in \mathbb{R}$

$L_3: R = (3; 1; -1) + r(1; 1; 1), r \in \mathbb{R}$

Halle, si existe, la ecuación del plano Q que contiene a L_3 y a su vez el plano sea paralelo a las rectas L_1 y L_2 .

R. no existe

10. Halle la ecuación cartesiana del plano que pasa por $(2; 6; 1)$ y contiene a la recta $\frac{x}{3} = \frac{z}{8}, y = -5$

R. $88x - 13y - 33z - 65 = 0$

11. La recta L que pasa por $(-1; 1; 6)$ es paralela a los planos $x + y = 0 \wedge 2x - z = 6$. La recta L_Q es la proyección de L sobre el plano xy . Halle las ecuaciones de las rectas L y L_Q .

12. Halle la ecuación de la recta que contiene al menor segmento horizontal (paralelo al plano xy) que une las rectas

$L_1: P = (0; 0; 0) + t_1(1; 2; 8), t_1 \in \mathbb{R}$

$L_2: Q = (1; 3; 0) + t_2(0; 1; 4), t_2 \in \mathbb{R}$

R. $L: P = (1; 2; 8) + t_3(0; 3; 0), t_3 \in \mathbb{R}$

13. Halle la ecuación cartesiana del plano que pasa por $P_0(1; 0; 0)$, sabiendo que la recta $L: P = (5; 1; -5) + t(1; 0; -1), t \in \mathbb{R}$ está a una distancia de 1 unidad de dicho plano ($L \parallel Q$).

14. Halle la ecuación cartesiana del plano, sabiendo que es paralelo al plano $2x + 2y - z + 7 = 0$ y que el punto $(5; 2; -3)$ equidista de ambos planos.

$$R. 2x + 2y - z - 41 = 0$$

15. Sean $L: P = (1; 1; 3) + t(2; 0; 1)$, $t \in \mathbb{R}$ y $Q: 2y - y + z - 15 = 0$ una recta y un plano respectivamente. Si $A = L \cap Q$, halle la ecuación de la recta L_1 que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta L_Q . La recta L_1 está contenida en el plano Q .

16. Dadas las rectas $L_1: P_1 = (3; 4; 5) + t_1(0; 1; -2)$, $t_1 \in \mathbb{R}$

$$L_2: P_2 = (4; -2; 1) + t_2(1; 2; 3), t_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_3: P_3 = (0; 0; 0) + t_3(2; 1; 0), t_3 \in \mathbb{R}$$

Halle la ecuación cartesiana de un plano que corta a estas rectas en los puntos A , B y C respectivamente, de modo que $\overline{AB} = \overline{BC}$. El plano solicitado es paralelo a la recta $x = y = z$ y los puntos A , B y C están alineados.

$$R. 19x - 20y + z - 81 = 0$$

17. $\vec{a} = (4; 0; 3)$ y $\vec{b} = (-3; \sqrt{11}; 4)$ son los vectores dirección de las rectas L_1 y L_2 respectivamente. Las rectas se intersecan en $(3; 2; 1)$. Halle la ecuación de la recta L_3 que pasa por el punto $P_0(31/5; 2; 17/5)$ y determina con L_1 y L_2 un triángulo de área $6 u^2$.

18. Halle la ecuación de una recta que pasa por el punto $(3; 4; -6)$ y es paralela a los planos $x + 2y - z = 4 \wedge 3x - y + 2z = -6$.

$$R. L: P = (3; 4; -1) + t(-3; 5; 7), t \in \mathbb{R}$$

19. Halle la ecuación del plano que dista del origen $\sqrt{234}$ unidades y pasa por la intersección de las rectas $L_1: P = (9; 5; 4) + t(1; 1; 2)$, $t \in \mathbb{R}$ y $L_2: Q = (1; 2; 3) + s(2; 1; 1)$, $s \in \mathbb{R}$

$$R. 11(x - 11) + 7(x - 7) + 8(z - 8) = 0$$

20. Halle la ecuación cartesiana del plano que pasa por $(3; 4; 1)$ y es perpendicular a los planos $x - y = 4 \wedge x + z = 6$.

$$R. x + y - z - 6 = 0$$

21. Si $L_1: P = (2; 1; 0) + t(1; -1; 1)$, $t \in \mathbb{R}$, halle la ecuación de la recta L que sea simétrica a la recta L_1 con respecto al plano $2x - y - z - 5 = 0$.

25. Dado el plano $x - 2y + 3z = 8$ y la recta $L: \frac{x+4}{4} = \frac{5-z}{3}, y = -1$

Halle la ecuación de la recta que pasa por $(0; 2; -1)$, es paralela al plano dado y corta a la recta L .

$$R. L_1: P = (0; 2; -1) + t(4; -1; -2), t \in \mathbb{R}$$

22. Dadas las rectas

$$L_1: P_1 = (1; 1; 2) + t_1(1; 2; 0), t_1 \in \mathbb{R}$$

$$L_2: P_2 = (2; 2; 0) + t_2(1; -1; 1), t_2 \in \mathbb{R}$$

$$L_3: P_3 = (0; 3; -2) + t_3(5; 0; 2), t_3 \in \mathbb{R}$$

Halle la ecuación de una recta que corte a estas tres rectas L_1 , L_2 y L_3 en los puntos M , N y P respectivamente, de tal manera que $\overline{MN} = \overline{NP}$

$$R. L: P = (0; -1; 2) + t(2; 2; -1), t \in \mathbb{R}$$

23. Sean las rectas $L_1 = \{(1; 0; 0) + r(1; 1; 1) / r \in \mathbb{R}\}$ y

$$L_2 = \{(7; 4; 3) + s(3; 4; 2) / s \in \mathbb{R}\}$$

Halle los vértices de un triángulo equilátero de lado $2\sqrt{2}u$, tal que un vértice pertenece a L_2 y el lado opuesto en L_1 .

$$R. (4; 0; 1), (2 \pm \sqrt{2/3}; 1 \pm \sqrt{2/3}; 2 \pm \sqrt{2/3})$$

24. Dadas las rectas no coplanares concurrentes en $P_0(1; -2; 3)$

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}, L_2: \frac{x-1}{3} = \frac{3-z}{-4} \wedge y = -2$$

$$L_3: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$$

Halle la ecuación de un plano que pasa por el punto $A(-4; 2; 6)$ y forma ángulos iguales con estas rectas.

$$R. 3x - y - z + 20 = 0$$

26. Dadas las rectas:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{5-z}{4} \quad y \quad L_2: x = -2, \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$$

que se cruzan. Halle la ecuación de la recta que pasa por $A(-1; -2; 0)$, es perpendicular a L_1 (en el espacio) e interseca a L_2 .

$$R. P = (-1; -2; 0) + t(-1; 6; 4), t \in \mathbb{R}$$

27. Dados los planos $Q_1: 2x + 2y - 2z + 2 = 0$ y $Q_2: x - 2y - z = 1$ y el punto $A(2; 1; 4)$. Halle la ecuación de una recta que pasa por A , es paralela a Q_2 y forma un ángulo de 30° con Q_1

$$R. L = \{(2; 1; 4) + t(11 \pm 6\sqrt{2}; 2 \pm 3\sqrt{2}; 7) / t \in \mathbb{R}\}$$

28. Halle la ecuación de una recta que pasa por $(3; 1; 2)$ y corta a la rectas

$$L_1: P = \{(2; 4; -1) + t(0; 1; 2) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2: \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + z = 6 \end{cases}$$

$$R. Q = (3; 1; 2) + s(-1; 10; 11), s \in \mathbb{R}$$

29. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $Q(3; -5; 2)$ y es perpendicular a los planos $2x + 3y - z - 5 = 0 \wedge x - 2y + 2z - 3 = 0$.

$$R. 4x - 5y - 7z - 23 = 0$$

30. Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $(-2; 5; 3)$ y $(4; 8; -8)$, y es perpendicular al plano xz .

$$R. 11x + 6z + 4 = 0$$

31. Encuentre la ecuación del plano que pasa por origen, es perpendicular al plano $2x + 3y - 5z = 0$ y es paralelo a la recta que pasa por los puntos $(1; -1; 3)$ y $(2; 1; -2)$.

$$R. 5x - 5y - z = 0$$

32. Encuentre la ecuación del plano que es paralelo al plano $12x - y - 17z = 4$ y pasa por la intersección de los planos $2x - y - 5z = 4$ \wedge $3x + y - z = 0$.

$$R. 12x - y - 17z = 12$$

33. Un plano pasa por los puntos $P_1(1; 0; -1)$ y $P_2(-1; 2; 1)$, y es paralelo a la recta de intersección de los planos $3x + y - 2z = 6$ \wedge $4x - y + 3z = 0$. Halle su ecuación.

$$R. 5x - 3y + 8z + 3 = 0$$

34. Encuentre la ecuación de un plano que pasa por $A(1; -2; 1)$ y es perpendicular al vector \overrightarrow{OA} , donde O es el origen de coordenadas.

$$R. x - 2y + z = 6$$

35. Encuentre la ecuación de un plano que pasa por los puntos $P_1(1; 2; 3)$ y $P_2(3; 2; 1)$, y es perpendicular al plano $4x - y + 2z = 7$.

$$R. x + 6y + z = 16$$

36. Encuentre la distancia del origen de coordenadas

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{2-z}{5}$$

$$R. 3u$$

37. La recta $L: \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ interseca al plano $x + 3y - z + 4 = 0$.

Encuentre el punto de intersección P y halle la ecuación de la recta contenida en este plano, que pasa por P y es perpendicular a L .

$$R. P(1; -2; -1), \quad \frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$$

38. Calcule la distancia mínima entre la rectas L_1 y L_2 , donde L_1 pasa por el origen y el punto $(1; 1; 1)$, y L_2 pasa por $(1; 2; -2)$ y es paralelo al vector $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

$$R. 3\sqrt{2}/2$$

39. Halle la ecuación del plano que forma un ángulo de 60° con el plano $2x - y + z = 7$ y contiene a la recta $L: P = (1; 8; 1) + t(1; -3; 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$R. x + y + 2z = 11, 11x + 2y - 5z - 22 = 0 \text{ (dos soluciones)}$$

40. Halle la ecuación cartesiana del plano que pasa por $(3; 4; 1)$ y es ortogonal a los planos $P: x - y = 4$ \wedge $Q: x + z = 6$

$$R. x + y - z - 6 = 0$$

41. Halle las ecuaciones de tres planos equidistantes, que pasan por los puntos

$$(1; 4; 0), (2; -5; 1) \text{ y } (3; 0; -2)$$

respectivamente, de tal manera que sean a su vez paralelas a la recta

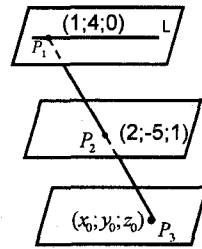
$$L = \{(1; 4; 0) + t(1; 1; 1) / t \in \mathbb{R}\}.$$

Sugerencia: Considere $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3}$

$$\text{R. } 9x - 2y - 7z - 1 = 0$$

$$9x - 2y - 7z - 21 = 0$$

$$9x - 2y - 7z - 41 = 0$$



42. Halle la longitud del menor segmento paralelo al plano xy , que une las rectas $L_1 = \{(1; 2; 0) + t_1(1; 2; 1) / t_1 \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(0; 0; 0) + t_2(1; 1; 1) / t_2 \in \mathbb{R}\}$
 R. $1u$

43. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(3; -1; 6)$ y es paralela a los planos $x - 2y + z = 2$ \wedge $2x + y - 3z = 5$.
 R. $x - 3 = y + 1 = z - 6$

44. Halle la ecuación del plano que es paralelo al plano $12x - y - 17z = 14$ y pasa por la intersección de los planos $2x - y - 5z = 4$ \wedge $3x + y - z = 0$.
 R. $12x - y - 17z = 6$

45. Encuentre la ecuación de los planos que bisecan el ángulo entre los planos $2x + y + z = 4$ \wedge $7x - y - 2z = 2$.
 R. $x - 4y - 5z + 10 = 0$

46. Con los puntos $A(1; 2; 3)$, $B(0; -1; 4)$ y $C(-1; 2; 6)$ se forma el paralelogramo $ABCD$. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos C y D .
 R. $L = \{(0; 5; 5) + t(-1; -3; 1) / t \in \mathbb{R}\}$

47. Halle la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y por la intersección de los planos $x - y + z - 4 = 0$ \wedge $2x + y - 2z - 6 = 0$.
 R. $x + 5y - 7z = 0$

48. Halle la ecuación cartesiana de un plano que pasa por $(1; 2; -3)$ y por la intersección del plano $x - y + 2z = 4$ con el plano xy .
 R. $3x - 3y - 5z - 12 = 0$

49. Encuentre la longitud mínima del cordel que se necesita para llegar desde el punto $P_0(8; 6; -5)$ hasta una vara recta de madera que pasa por los puntos $Q_1(3; 5; 3)$ y $Q_2(8; 3; 1)$
 R. $d = 5,65 u$

50. Las rectas $L_1 = \{(5; 11; -2) + t_1(0; 8; -1), t_1 \in \mathbb{R}\}$

$$L_2 = \{(8; -23; 3) + t_2(3; -10; -4), t_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$L_3 = \{(8; 1; -6) + t_3(3; -2; -5), t_3 \in \mathbb{R}\}$$

contienen a los lados del triángulo ABC . Halle la distancia del centro de gravedad de dicho triángulo al plano $5x + 12z + 14 = 0$.

R. $5u$

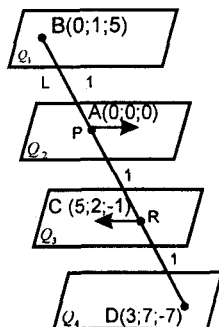
51. Dados los puntos no colineales $A(0; 0; 0)$, $B(0; 1; 5)$, $C(5; 2; -1)$ y $D(3; 7; -7)$, determine la ecuación de los planos paralelos que pasan por dichos puntos, de tal manera que las distancias que los separan sean iguales.

$$R. Q_1: 9x + y - 12z + 59 = 0,$$

$$Q_2: 9x + y - 12z = 0$$

$$Q_3: 9x + y - 12z - 59 = 0,$$

$$Q_4: 9x + y - 12z - 118 = 0.$$



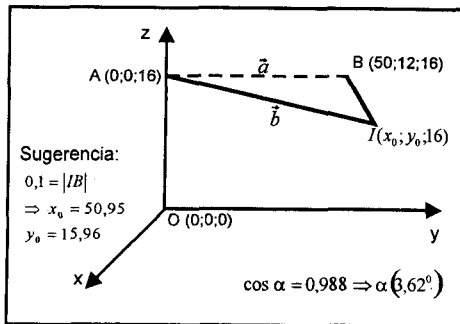
Sugerencia: En el gráfico adjunto, para determinar las coordenadas del punto $P(x_0; y_0; z_0)$ la razón es

$$r = \frac{\overline{DP}}{\overline{BP}} = \frac{2}{1} \text{ y la normal del plano es } \vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$$

52. Un hombre que se encuentra en $O(0; 0; 0)$ lanza una flecha desde $A(0; 0; 16)$ hacia un blanco en $B(50; 12; 16)$ que se encuentra sobre el plano

$$25x - 6y - 1178 = 0,$$

haciendo impacto a 0,1 unidades del blanco. Si la flecha fue lanzada con una trayectoria paralela al plano xy , halle el ángulo que debió girar el hombre para no fallar.



R. $3,62^\circ$

53. Se tienen dos túneles que parten de la superficie (suponer que la superficie es lisa y es el plano xy) desde los puntos $P_{1A}(0; 5/2; 0)$ y $P_{1B}(5; 2; 0)$ y llegan respectivamente a los puntos $P_{2A}(-7; -1; -7)$ y $P_{2B}(-5; 3; -5)$. Halle la mínima distancia que debe tener un túnel para quedar a nivel (paralelo al plano xy) y sirva para interconectar a los túneles A y B .

R. $d = 2,457$

Sugerencia: El túnel que debe intersecar a los dos túneles debe ser paralelo al plano xy para que quede a nivel, luego igualar las coordenadas z de los puntos que se toma sobre cada túnel.

54. Un niño patea una pelota desde el punto $P_0(8; -10; 12)$ y ésta se mueve en línea recta en la dirección del vector $\vec{v} = (2; 2; 2)$, con velocidad constante. Si la pelota se dirige hacia una ventana de vidrio, ¿qué tiempo tardará en impactar con el vidrio si la ventana está en el plano $2x + 8z = -4$?

R. $\sqrt{2} u$

55. Halle la ecuación cartesiana de un plano que contenga a la recta

$$L = \{(1; 2; -3) + t(1; -4; 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y se encuentra a una distancia $8/\sqrt{41}$ unidades del punto $(2; -4; -5)$.

R. $6x + 2y + z - 7 = 0 \quad \wedge \quad 30x + 2y - 11z - 67 = 0$

56. Un rayo de luz parte del punto $(1; 4; 2)$, se refleja en el espejo plano yz . El rayo reflejado, se refleja nuevamente en el espejo plano xz y este último rayo reflejado pasa por $(5; 1; 4)$. Halle la ecuación de este último rayo reflejado.

R. $L = \{(19/5; 0; 18/5) + t(6; 5; 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

57. Un rayo de luz parte del punto $(2; 1; 6)$, se refleja en el espejo plano xz ; este rayo reflejado se refleja nuevamente en el espejo plano yz , y este último rayo reflejado pasa por $(3; 8; 2)$. Halle la ecuación de este último rayo reflejado.

R. $L = \{(0; 13/5; 22/5) + t(5; 9; -4) \mid t \in \mathbb{R}\}$

58. En los planos paralelos $P_1: 4x - 8y - z + 9 = 0$ y $P_2: 4x - 8y - z - 18 = 0$, se tienen los puntos Q_1 y Q_2 respectivamente. Halle el volumen del cilindro cuya diagonal $\overline{Q_1Q_2}$ mide 9 unidades.

R. $V = 54 \pi u^3$

59. Una puerta rotatoria de un centro comercial consta de dos planos

$$P_1: 5x + 3y - z - 9 = 0 \quad \text{y} \quad P_2: 3x - 2y + 5z - 6 = 0$$

Se quiere aumentar un plano más a la puerta, de tal manera que pase por la recta de intersección de ambos planos y que sea paralelo a la columna que describe la ecuación de la recta $L_1 = \{(3; 1; 6) + t(1; 1; 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Halle la ecuación de dicho plano.

R. $19x - 19y + 41z - 39 = 0$

60. Un barco se encuentra en el punto $P(2; 3; 0)$ y tiene un movimiento rectilíneo con una velocidad constante $\vec{v}_1 = (1; 5; 0)$. En ese mismo instante un avión comercial empieza a caer desde el punto $(5; 4; 6)$ con una velocidad constante $\vec{v}_2 = (2; 11; -6)$ en línea recta. Con estos elementos de juicio se pregunta

a) ¿El avión cae sobre el barco?

b) Si no es así, ¿cuál será la menor distancia entre ellos?

R. a) No b) $2,5 u$

SUPERFICIES

Una superficie es un conjunto de puntos $P(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas satisfacen una ecuación dada en las variables x , y y z , esto es,

$S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / E(x; y; z) = 0\}$ es generalmente una superficie.

Un ejemplo de superficie es el plano (su ecuación es $Ax + By + Cz + D = 0$)

Observación 1 Existen ecuaciones tales como

a) $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 + 8 = 0$

b) $(x + 1)^2 + 4(y - 2)^2 + 3(z - 5)^2 = 0$

que no representan a una superficie. Para la ecuación (a), no existen números reales x , y , z que satisfagan la ecuación dada, en este caso se dice que (a) representa al **conjunto vacío** (\emptyset)

Para la ecuación (b), los únicos números reales que satisfacen la ecuación son $x = -1$, $y = 2$, $z = 5$. Luego, la ecuación (b) representa solamente al punto $P(-1; 2; 5)$.

Observación 2 (Traslación de ejes) De modo similar a la traslación de ejes en el plano cartesiano, se efectúa la traslación de ejes en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 .

Si el sistema de coordenadas $oxyz$ se traslada a un nuevo origen $O'(h; k; l)$, de

modo que las coordenadas de cualquier punto $P \in \mathbb{R}^3$ antes y después de la traslación son $(x; y; z)$ y $(x'; y'; z')$ respectivamente (Fig. 7.1), entonces las relaciones de transformación del sistema original ($oxyz$) al nuevo sistema de coordenadas ($o'x'y'z'$) son

$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \\ z = l + z' \end{cases}$$

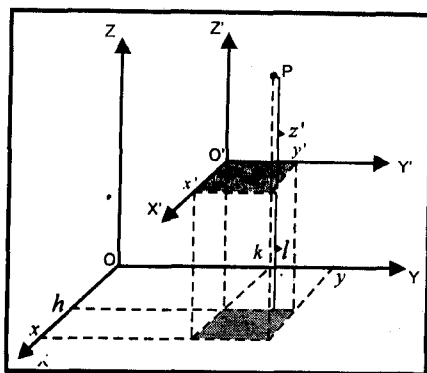


Fig. 7.1

7.1 ESFERA

Definición: Una esfera es el conjunto de todos los puntos del espacio \mathbb{R}^3 que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. La distancia constante de cualquier punto al centro se llama **radio** y se denota con $r > 0$.

Sea $P(x; y; z)$ cualquier punto de la esfera de centro $C(h; k; l)$ y radio $r > 0$. Entonces, por definición tenemos

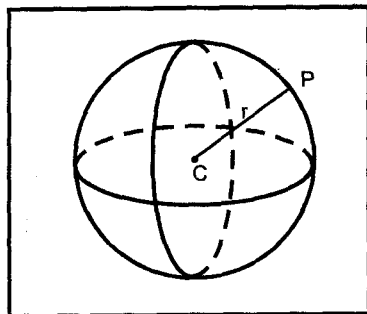


Fig. 7.2

$$d(C; P) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2} = r$$

De donde,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2 \quad (*)$$

Esta ecuación se llama **forma ordinaria** de la ecuación de la esfera.

La esfera con centro en el origen de coordenadas y radio $r > 0$ tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

y esta ecuación se denomina **forma canónica** de la ecuación de la esfera.

Si desarrollamos la forma ordinaria de la ecuación de la esfera, obtenemos una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0 \quad (\alpha)$$

que es la ecuación de la esfera en su **forma general**.

Cualquier ecuación de la forma (α) , empleando el método de completar cuadrados, se puede expresar en la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = t \quad (\beta)$$

Comparando las ecuaciones $(*)$ y (β) , se tienen tres posibilidades:

Si $t > 0$, (β) representa a una esfera de centro $C(h; k; l)$ y radio \sqrt{t}

Si $t = 0$, (β) representa al punto $C(h; k; l)$

Si $t < 0$, (β) representa al conjunto vacío

Ejemplo 1

- a) Halle la ecuación de la esfera de centro $C(2; -1; 0)$ y radio $r = 3$.
- b) Halle la ecuación de la esfera si uno de sus diámetros es el segmento de extremos $A(3; 1; 4)$ y $B(5; -1; 2)$.
- c) Determine si una de las siguientes ecuaciones representa a una esfera, a un punto o al conjunto vacío.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1 = 0$
 - $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 6 = 0$
 - $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 8z + 35 = 0$

Solución

- a) Utilizando la forma ordinaria de la ecuación de una esfera, tenemos.

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9 \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

- b) Como el centro de la esfera es el punto medio de \overline{AB} , es decir, $C(4; 0; 3)$ y el radio $r = d(C; A) = \sqrt{3}$; entonces la ecuación de la esfera es de la forma

$$(x - 4)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 3 \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6z + 22 = 0$$

- c) Al completar los cuadrados en cada una de las ecuaciones, obtenemos

- $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 13$. Esfera de centro $C(1; -2; 3)$ y radio $r = \sqrt{13}$
- $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 0$. Luego, la ecuación representa el punto $C(2; -1; 1)$
- $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = -9$. La ecuación dada representa al conjunto vacío.

Ejemplo 2 Halle la ecuación de la esfera que es tangente a los planos

$$Q_1: x + 2y + z - 4 = 0 \quad \text{y}$$

$$Q_2: x - y + 2z - 5 = 0,$$

y tiene su centro en el eje z . (Dos soluciones)

Solución

Sea $C(0; 0; l)$ el centro de la esfera buscada. Entonces, utilizando la fórmula de distancia de punto a plano, tenemos

$$d(C, Q_1) = d(C, Q_2) \Leftrightarrow \frac{|l - 4|}{\sqrt{6}} = \frac{|2l - 5|}{\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow l = 1 \quad \vee \quad l = 3$$

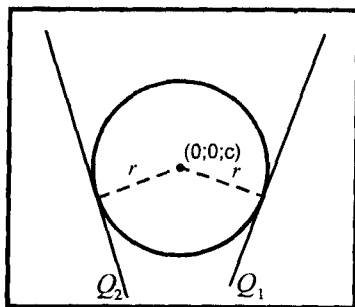


Fig. 7.3

SUPERFICIES

Si $l = 1$, la ecuación buscada de la esfera es

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \frac{3}{2} \quad \text{ó} \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4z - 1 = 0$$

Si $l = 3$, la ecuación buscada de la esfera es

$$x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = \frac{1}{6} \quad \text{ó} \quad 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 36z + 53 = 0$$

Ejemplo 3 El plano Q pasa por el punto $P_0(1; -1; 0)$ y contiene a la recta

$$L: x - 1 = \frac{y + 1}{4} = z + 4$$

Halle la ecuación de la esfera, con centro $C(0; -2; 1)$ y tangente al plano Q .
¿Cuál es el punto de contacto?

Solución

Dado que el punto de paso de la recta L es $P_1(1; -1; -4)$, entonces los vectores que están contenidos en el plano Q son

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = (0; 0; -4) \quad \text{y} \quad \vec{b} = (1; 4; 1)$$

Luego, el vector normal \vec{N} del plano es

$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b} = (16; -4; 0)$$

Así, la ecuación del plano Q es

$$Q: 16(x - 1) - 4(y + 1) = 0 \quad \text{ó} \quad Q: 4x - y - 5 = 0$$

Utilizando la fórmula de distancia de punto a plano, el radio de la esfera es

$$r = d(C; Q) = \frac{|2 - 5|}{\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

Así, la ecuación de la esfera de centro $C(0; -2; 1)$ y radio $r = 3/\sqrt{17}$ es

$$x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = \frac{9}{17}$$

$$\Leftrightarrow 17x^2 + 17y^2 + 17z^2 + 68y - 34z + 76 = 0$$

El punto de contacto entre el plano Q y la esfera es $I = Q \cap L_N$, donde L_N es la recta que pasa por el centro de la esfera y sigue la dirección del vector \vec{N} ; su ecuación vectorial es $L_N: P = (0; -2; 1) + t(4; -1; 0), t \in \mathbb{R}$.

Hallando la intersección de L_N con el plano Q , se obtiene el punto de tangencia $I(12/17; -37/17; 1)$

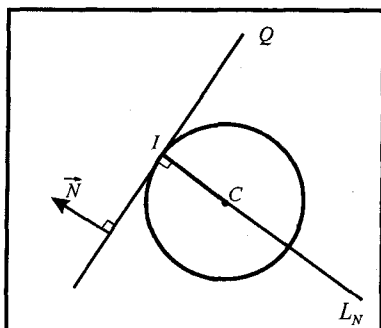


Fig. 7.4

Ejemplo 4 Encuentre la ecuación de la esfera que tiene su centro en el plano xz y es tangente al plano $Q: 2x - y + z - 4 = 0$, en el punto $P_1(1; 5; 7)$.

Solución

La ecuación vectorial de la recta L_N que pasa por el punto $P_1(1; 5; 7)$ y sigue la dirección del vector normal $\vec{N} = (2; -1; 1)$ (Fig. 7.5) es

$$L_N: (x; y; z) = (1; 5; 7) + t(2; -1; 1), t \in \mathbb{R}$$

Si C es el centro de la esfera, entonces

$$C \in L_N \cap \text{Plano } xz$$

$$\Leftrightarrow C \in L_N \wedge C \in \text{Plano } xz$$

$$\Leftrightarrow C(1 + 2t; 5 - t; 7 + t) \in \text{Plano } xz (y = 0) \Leftrightarrow 5 - t = 0 \Leftrightarrow t = 5$$

Luego, el centro de la esfera es $C(11; 0; 12)$ y su radio $r = d(C; P_1) = \sqrt{150}$

Por consiguiente, la ecuación buscada de la esfera es

$$(x - 11)^2 + (y - 0)^2 + (z - 12)^2 = 150 \quad \text{ó}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 22x - 24z + 115 = 0$$

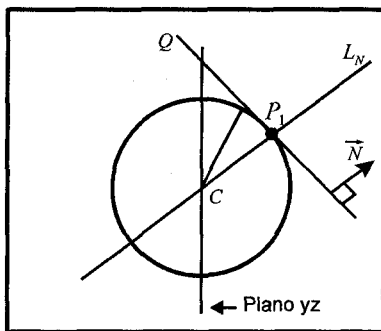


Fig. 7.5

EJERCICIOS

- Halle la ecuación de la esfera de centro $C(4; 3; -1)$ y radio $r = \sqrt{7}$.
R. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 2z + 19 = 0$
- Halle la ecuación de la esfera si uno de sus diámetros es el segmento de extremos $A(10; -5; 8)$ y $B(2; 5; -14)$.
R. $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 6z - 117 = 0$
- Determine si una de las siguientes ecuaciones representa a una esfera, a un punto o al conjunto vacío. Si representa a una esfera determine su centro y su radio.
 - $x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 8y + 4z + 75 = 0$
 - $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z + 29 = 0$
 - $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 15 = 0$

R. a) Esfera, $C(8; -4; -2)$ y $r = 3$ b) Punto c) \emptyset
- Halle la ecuación de la esfera que es tangente al plano $x - 8y + 4z + 7 = 0$ y es concéntrica a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y - 6z + 33 = 0$.
R. $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y - 6z + 48 = 0$

SUPERFICIES

4. Halle la ecuación de la esfera que tiene su centro en el eje x y pasa por los puntos $P_1(0; 5; 0)$ y $P_2(-2; 1; 0)$.

$$R. x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 25 = 0$$

5. Encuentre la ecuación de la esfera que tiene su centro en el plano coordenado yz y es tangente al plano $x + 3y - 2z + 1 = 0$ en el punto $P(5; 0; 3)$.

$$R. x^2 + y^2 + z^2 + 30y - 26z - 106 = 0$$

6. Determine la ecuación de la esfera que pasa por el punto $P_0(-2; 4; 0)$ y por la intersección de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$
 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 10 = 0$

$$R. x^2 + y^2 + z^2 - 19x - 32y - 21z + 70 = 0$$

Sugerencia. Si $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$ son las ecuaciones de dos esferas, entonces $S_1 + kS_2 = 0$, para $k \neq -1$, representa la familia de esferas que pasan por la intersección de las esferas dadas, con la excepción de la esfera $S_2 = 0$

7. Determine la ecuación de la esfera que pasa por la circunferencia de intersección de las esferas:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 6z + 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z - 12 = 0$$

y es tangente al plano $x + 2y - 2z - 3 = 0$

$$R. S_1: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 4z + 8 = 0$$

$$S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 24y + 22z + 44 = 0$$

8. Una recta L pasa por el punto $A(3; -4; 6)$, interseca a la recta

$$L_1: P = (6; -10; 12) + t(1; 0; 0) \text{ y a la esfera}$$

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = \frac{29}{4}$$

en una cuerda de longitud 3 unidades. Halle la ecuación vectorial de L (dos soluciones).

9. Halle la ecuación del plano Q que contiene a la recta

$$L: P = (1; 2; 3) + t(1; -1; 0), \quad t \in \mathbb{R}$$

de modo que dicho plano sea tangente a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (dos soluciones)

Sugerencia. Usar la condición $d(C; Q) = 1$ donde $C(0; 0; 0)$

$$R. Q_1: 2x + 2y - z - 3 = 0, \quad Q_2: 4x + 4y - 7z + 9 = 0$$

10. Un plano contiene a la recta $L: 6x = 2y = -3z$ e interseca a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 10z + 5 = 0$ en una circunferencia de radio 3. Halle la ecuación del plano (dos soluciones).

7.2 DISCUSIÓN Y GRÁFICA DE LA ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE

De manera similar a la discusión que se efectúa en la ecuación de una curva plana, en el caso de las superficies es también ventajoso discutir previamente su ecuación antes de construir su gráfica. Para discutir la ecuación $E(x; y; z) = 0$ de una superficie se siguen los siguientes pasos:

- I) **Intersección con los ejes coordenados.** Son las intersecciones de la superficie con cada uno de los ejes coordenados.
 - i) **Con el eje x .** Se reemplaza $y = z = 0$ en la ecuación de la superficie y se analiza la ecuación resultante.
 - ii) **Con el eje y .** Se reemplaza $x = z = 0$ en la ecuación de la superficie y se analiza la ecuación resultante.
 - iii) **Con el eje z .** Se reemplaza $x = y = 0$ en la ecuación de la superficie y se analiza la ecuación resultante.
- II) **Trazas sobre los planos coordenados.** La traza de una superficie es una curva formada por la intersección de la superficie con el plano coordenado. Así, las trazas sobre los planos coordenados se obtienen de la siguiente manera
 - i) **Con el plano xy .** Se reemplaza $z = 0$ en la ecuación de la superficie se analiza la ecuación resultante.
 - ii) **Con el plano yz .** Se reemplaza $x = 0$ en la ecuación de la superficie y se analiza la ecuación resultante.
 - iii) **Con el plano xz .** Se reemplaza $y = 0$ en la ecuación de la superficie y se analiza la ecuación resultante.
- III) **Trazas en los planos paralelos a los planos coordenados.** Son las intersecciones de la superficie con planos paralelos a los planos coordenados.
 - i) **Con planos paralelos al plano xy .** Se reemplaza $z = k$ en la ecuación de la superficie y se analiza la ecuación resultante.
 - ii) **Con planos paralelos al plano xz .** Se reemplaza $y = k$ en la ecuación de la superficie y se analiza la ecuación resultante.
 - iii) **Con planos paralelos al plano yz .** Se reemplaza $x = k$ en la ecuación de la superficie y se analiza la ecuación resultante.
- IV) **Extensión de una superficie** Se entiende por extensión de la superficie a los intervalos de variación, en los cuales las variables $x, y \wedge z$ tienen valores reales.

V) **Simetrías con respecto a los planos coordenados, a los ejes coordenados y al origen.** Se dice que dos puntos P y Q son simétricos con respecto a un plano, si el plano es perpendicular al segmento que los une en su punto medio.

Por otro lado, se dice que una superficie es simétrica con respecto a un plano, cuando el plano es perpendicular al segmento que une dos puntos de la superficie en su punto medio.

Observación 3

Si $P(x; y; z)$ es un punto del espacio, entonces tenemos

- a) El simétrico de P con respecto al plano xy es $Q(x; y; -z)$
- b) El simétrico de P con respecto al plano xz es $Q(x; -y; z)$
- c) El simétrico de P con respecto al plano yz es $Q(-x; y; z)$
- d) El simétrico de P con respecto al eje x es $Q(x; -y; -z)$
- e) El simétrico de P con respecto al eje y es $Q(-x; y; -z)$
- f) El simétrico de P con respecto al eje z es $Q(-x; -y; z)$
- g) El simétrico de P con respecto al origen es $Q(-x; -y; -z)$

Una superficie es simétrica con respecto a una recta L si el simétrico de cada punto de la superficie, respecto a la recta L , es también un punto de la superficie.

Una superficie es simétrica con respecto a un punto C si el simétrico de cada punto de la superficie, respecto al punto C , es también un punto de la superficie.

De acuerdo con estas consideraciones, se obtiene los resultados dados en la siguiente tabla:

Si la ecuación de la superficie no se altera cuando se reemplaza	La superficie es simétrica con respecto al
x por $-x$	Plano yz
y por $-y$	Plano xz
z por $-z$	Plano xy
x por $-x$ y y por $-y$	Eje z
x por $-x$ y z por $-z$	Eje y
x por $-x$ y y por $-y$	Eje x
x por $-x$ y y por $-y$ y z por $-z$	origen

VI) **Construcción de la superficie (gráfica).** Con la ayuda de los pasos anteriores se construye la gráfica de la ecuación de una superficie.

Ejemplo 5 Discutir y graficar la ecuación $9x^2 + 4y^2 - 12z = 0$

Solución

I. Intersecciones con los ejes

- i) Con el eje x : haciendo $y = z = 0$ en la ecuación se obtiene $9x^2 = 0$, entonces $x = 0$. La superficie interseca al eje x en el origen de coordenadas.

Al estudiar las otras intersecciones se comprueba que el origen es el único punto de intersección.

II. Trazas sobre los planos coordenados

- i) Sobre el plano xy . Haciendo $z = 0$ se obtiene $9x^2 + 4y^2 = 0$. Esta ecuación, en el plano xy , representa al origen de coordenadas.
- ii) Sobre el plano xz . Se hace $y = 0$ y se obtiene $9x^2 - 12z = 0$. Esta ecuación, en el plano xz , representa a una parábola.
- iii) Sobre el plano yz . Haciendo $x = 0$ se tiene la parábola $4y^2 - 12z = 0$

III. Trazas en los planos paralelos a los planos coordenados

- i) Con planos paralelos al plano xy . Haciendo $z = k$ en la ecuación de la superficie se obtiene $9x^2 + 4y^2 = 12k$. Se observa que hay intersección solamente cuando $k \geq 0$ (si $k = 0$ es un punto, si $k > 0$ es una elipse).
- ii) Con planos paralelos al plano xz . Reemplazando $y = k$ en la ecuación de la superficie se obtiene $9x^2 - 12z + 4k^2 = 0$. Esta ecuación representa a una parábola $\forall k \in \mathbb{R}$.
- iii) Con planos paralelos al plano yz . Reemplazando $x = k$ en la ecuación se tiene $4y^2 - 12z + 9k^2 = 0$. Esta ecuación representa a una parábola $\forall k \in \mathbb{R}$.

IV. Extensión

La ecuación $9x^2 + 4y^2 - 12z = 0$ está definida

$\forall x \in \mathbb{R}$ (de III– iii), $\forall y \in \mathbb{R}$ (de III– ii) y $\forall z \in [0; +\infty)$ (de III– i).

V. Simetrías

Al reemplazar x por $-x$ en la ecuación de la superficie se observa que esta no varía, es decir, la superficie es simétrica con respecto al plano yz . De manera similar, la superficie es simétrica con respecto al plano xz y al eje z .

VI. Gráfica

La gráfica de esta ecuación se muestra en la Fig. 7.6 y se llama **paraboloides elíptico**.

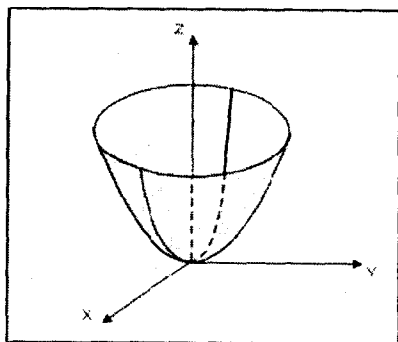


Fig. 7.6

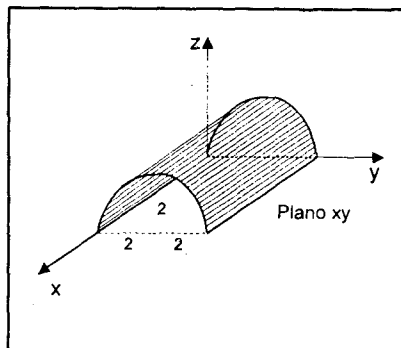


Fig. 7.7

Ejemplo 6 Discutir y graficar la superficie cuya ecuación es $y^2 - 4y + 2z = 0$
Solución

I. Intersección con los ejes

- i) Con el eje x . Haciendo $y = z = 0$ se obtiene $0 = 0$, esto significa que todo punto del eje x satisface la ecuación de la superficie, es decir, la intersección de la superficie con el eje x es el eje x .
- ii) Con el eje y . Si $x = z = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 4$. Luego, las intersecciones con el eje y son los puntos $P_1(0; 0; 0)$ y $P_2(0; 4; 0)$
- iii) Con el eje z . Si $x = y = 0 \Rightarrow 2z = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Así, la intersección con el eje z es el origen de coordenadas.

II. Trazas sobre los planos coordenados

- i) Sobre el plano xy . Las trazas son las rectas $y = 0$ (eje x) e $y = 4$ (recta paralela al eje x).
- ii) Sobre el plano xz . La traza es la recta $z = 0$ (eje x).
- iii) Sobre el plano yz . La traza es la parábola $y^2 - 4y + 2z = 0$

III. Trazas en los planos paralelos a los planos coordenados

i) Con planos paralelos al plano xy .

$$z = k \Rightarrow y^2 - 4y + 2k = 0 \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{4 - 2k}$$

Existe intersección para $k \leq 2$ (Para $k = 2$ es una recta, para $k < 2$ son dos rectas paralelas)

ii) Con planos paralelos al plano xz . $y = k \Rightarrow 2z = 4k - k^2$, es una recta $\forall k \in \mathbb{R}$

iii) Con planos paralelos al plano yz . $x = k \Rightarrow y^2 - 4y + 2z = 0$, es una parábola, $\forall k \in \mathbb{R}$

IV. Extensión

La ecuación $y^2 - 4y + 2z = 0$ está definida $\forall x \in \mathbb{R}$ (de III- iii), $\forall y \in \mathbb{R}$ (de III- ii) y $\forall z \in \langle -\infty; 2 \rangle$ (de III- ii).

V. Simetrías

Existe simetría con respecto al plano yz .

VI. Gráfica

En la Fig. 7.7 se muestra la parte de la superficie que se encuentra en el primer octante. La superficie se denomina **cilindro parabólico**.

EJERCICIOS

En cada uno de los siguientes ejercicios efectúe la discusión y trace la gráfica de la superficie representada por las ecuaciones dadas.

1. $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (elipsoide)
2. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (cono circular)
3. $x^2 + z^2 - 4y = 0$ (Paraboloide de revolución o circular)
4. $y^2 - x^3 = 0$ (Cilindro)
5. $9x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 36$ (Hiperboloide circular de dos hojas)
6. $9x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 36$ (Hiperboloide elíptico de una hoja)
7. $y^2 - x^2 = 2z$ (Paraboloide hiperbólico)
8. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (esfera)
9. $y^2 - x^2y = 0$
10. $z = |y|$

7.3 CILINDROS

Un **cilindro** es una superficie generada por una recta que se mueve a lo largo de una curva plana dada, permaneciendo siempre paralela a una recta fija que no está en el plano de dicha curva. La recta que se mueve se llama **generatriz** del cilindro y la curva plana se llama **directriz** del cilindro.

Si la generatriz de un cilindro es perpendicular al plano de la directriz, el cilindro es llamado **cilindro recto** y en caso contrario, **cilindro oblicuo**.

Si la directriz es una recta, el cilindro se reduce a un plano.

En lo que sigue, se considera que la directriz es una curva contenida en uno de los planos coordenados.

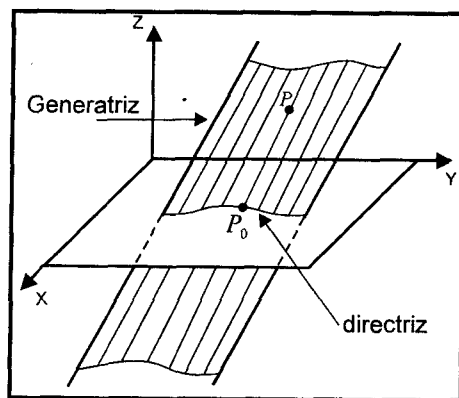


Fig. 7.8

Supongamos que la directriz está en el plano xy (Fig. 7.8). Luego, su ecuación es de la forma $E(x; y) = 0 \wedge z = 0$. Si $P(x; y; z)$ es un punto del cilindro cuya generatriz tiene por vector dirección al vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y si $P_0(x'; y'; 0)$ es el punto de intersección de la directriz con la generatriz que pasa por P , entonces

$$E(x', y') = 0, \quad z' = 0 \quad (\alpha)$$

La ecuación de la recta que pasa por P y P_0 es:

$$\frac{x - x'}{a_1} = \frac{y - y'}{a_2} = \frac{z - z'}{a_3} \quad (\beta)$$

De (α) y (β) , eliminando las variables x', y' y z' se obtiene la ecuación del cilindro.

Ejemplo 7 Halle la ecuación del cilindro cuya directriz es la curva $y^2 = 4x \wedge z = 0$ y $\vec{a} = (1; -1; 1)$ es el vector dirección de la generatriz.

Solución

Sea $P(x; y; z)$ un punto del cilindro y $P_0(x'; y'; z')$ la intersección de la directriz con la generatriz que pasa por P , entonces la ecuación de dicha generatriz es

$$\frac{x - x'}{1} = \frac{y - y'}{-1} = \frac{z - z'}{1} \quad (\alpha)$$

Como P_0 es un punto de la directriz, entonces se tiene

$$y'^2 = 4x' \wedge z' = 0 \quad (\beta)$$

Reemplazando $z' = 0$ en (α) se obtiene:

$$x - x' = z \wedge y - y' = -z$$

De donde $x' = x - z \wedge y'^2 = (y + z)^2$. Reemplazando estos valores en $y'^2 = 4x'$ se obtiene $(y + z)^2 = 4(x - z)$.

Por tanto, la ecuación de la superficie cilíndrica es $(y + z)^2 = 4(x - z)$

Este cilindro se llama **cilindro parabólico oblicuo**. En la Fig. 7.9 se muestra su gráfica (para $z \geq 0$).

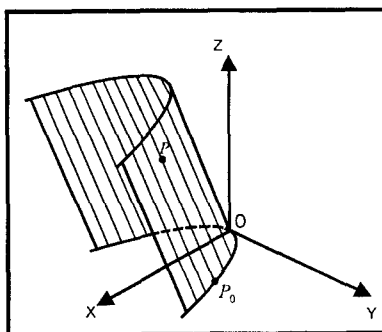


Fig. 7.9

Ejemplo 8 Halle la ecuación del cilindro recto cuya directriz es la curva

$$z = \frac{2|x|}{1 + x^2} \wedge y = 0$$

Solución

Supongamos que la generatriz que pasa por el punto $P(x; y; z)$ (Fig. 7.10) de la superficie corta a la directriz en el punto $P_0(x'; y'; z')$, entonces la ecuación de la generatriz (eje y) es

$$x = x' \wedge z = z' \quad (\alpha)$$

Como P_0 pertenece a la curva, entonces

$$z' = \frac{2|x'|}{1 + x'^2} \wedge y' = 0 \quad (\beta)$$

Reemplazando (α) en (β) se obtiene

$$z = \frac{2|x|}{1 + x^2}$$

Se observa que esta ecuación es similar a la ecuación de la directriz.

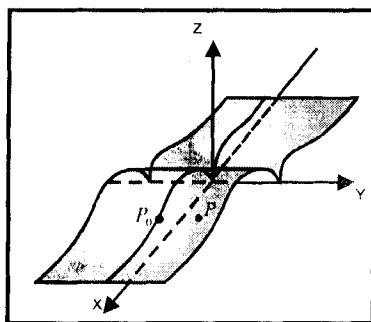


Fig. 7.10

Observación 3 En el espacio tridimensional, la gráfica de una ecuación en dos de las tres variables x, y, z es un cilindro cuya directriz es una curva que se encuentra en el plano asociado con las dos variables que aparecen en la ecuación y cuyas generatrices son paralelas al eje coordenado asociado con la variable faltante, es decir,

- 1) $E(x; y) = 0$ representa (en el espacio) a un cilindro con:

Directriz: $E(x; y) = 0 \wedge z = 0$

Generatriz: eje z (variable que falta en la ecuación)

- 2) $E(x; z) = 0$ representa a un cilindro con

Directriz: $E(x; z) = 0 \wedge y = 0$

Generatriz: eje y

- 3) $E(y; z) = 0$ representa a un cilindro con

Directriz: $E(y; z) = 0 \wedge x = 0$

Generatriz: eje x

Ejemplo 9 Trace la gráfica de la superficie representada por cada una de las ecuaciones

a) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

b) $z - e^x = 0$

c) $z^2 - y^3 = 0$

d) $x^2 = (y + 1)y^2$

Solución

Las gráficas se muestran en las figuras 7.11, 7.12, 7.13 y 7.14

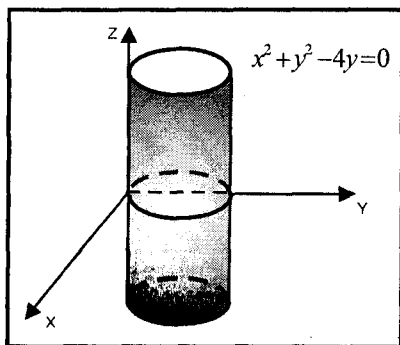


Fig. 7.11

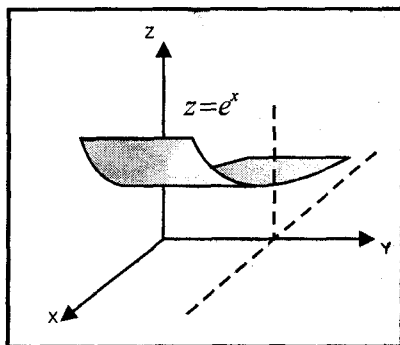


Fig. 7.12

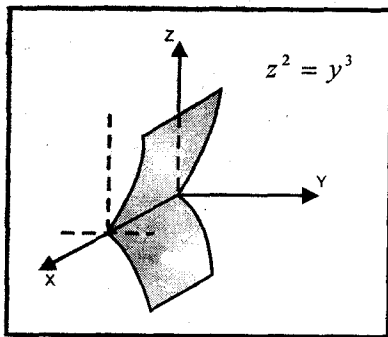


Fig. 7.13

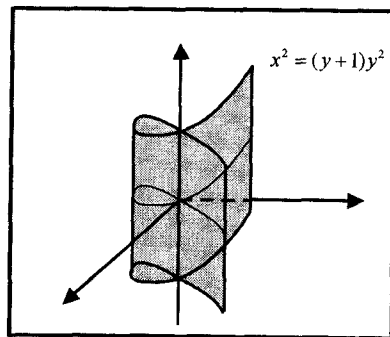


Fig. 7.14

EJERCICIOS

I. En cada uno de los siguientes ejercicios halle la ecuación del cilindro usando las ecuaciones de la directriz y el vector dirección de la generatriz.

1. $x^2 + 4y = 1 \wedge z = 0$, $\vec{a} = (1; 1; 3)$

R. $9x^2 + z^2 - 6xz - 36y + 12z = 0$

2. $y^2 - z^2 = 1 \wedge x = 0$, $\vec{a} = (-1; 1; 2)$

3. $x^2 + y = 1 \wedge z = 0$, $\vec{a} = (2; 1; 0)$

II. Esboce la gráfica de la superficie representada por cada una de las siguientes ecuaciones

1. $y^2 - 2y + 4 = z$

2. $y = \cos x$, $x \in [0; 4\pi]$

3. $y^3 = x^2$

4. $x^2 - y^2 = 1$

5. $4x^2 + y^2 = 4$

6. $y = \ln x$

7. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

8. $y^2 = 4z$

9. $z = x e^x$

10. $y = \tan z$, $z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

7.4 SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

La superficie generada por la rotación de una curva plana alrededor de una recta fija que está en el plano de la curva, se llama **superficie de revolución**. La recta fija se llama **eje de revolución** y la curva plana se llama **curva generadora**.

Si por un punto cualquiera $P(x; y; z)$ se traza un plano perpendicular al eje de revolución, la intersección de la superficie con dicho plano es una circunferencia (Fig. 7.15).

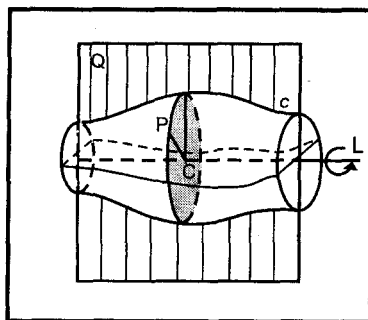


Fig. 7.15

Si C es el punto de intersección del plano con el eje de revolución L y Q es el punto de intersección con la curva generadora, entonces se verifica

$$d(P; C) = d(Q; C)$$

A la ecuación generada por esta igualdad se denomina **ecuación de la superficie de revolución**.

En lo que sigue, se considera que la curva generadora está contenida en un plano coordenado o en un plano paralelo a un plano coordenado.

Observación 4 En la siguiente tabla, se muestra la forma de la ecuación de una superficie de revolución generada por una curva que se encuentra en un plano coordenado y gira sobre uno de los ejes coordenados.

Ecuación de la curva generadora	Eje de revolución	Ecuación de la superficie de revolución
$z = f(y), x = 0$	eje y	$x^2 + z^2 = [f(y)]^2$
$x = f(y), z = 0$	eje y	$x^2 + z^2 = [f(y)]^2$
$z = f(x), y = 0$	eje x	$y^2 + z^2 = [f(x)]^2$
$y = f(x), z = 0$	eje x	$y^2 + z^2 = [f(x)]^2$
$y = f(z), x = 0$	eje z	$x^2 + y^2 = [f(z)]^2$
$x = f(z), y = 0$	eje z	$x^2 + y^2 = [f(z)]^2$

Demostremos la primera fórmula de la tabla, donde la ecuación de la curva generadora es $C: z = f(y)$, $x = 0$ y el eje de rotación es el eje y .

Sea $P(x; y; z)$ un punto cualquiera de la superficie de revolución. Si Q es el punto de intersección del plano perpendicular al eje y que pasa por P con la curva generadora y C es el punto de intersección de dicho plano con el eje y , entonces

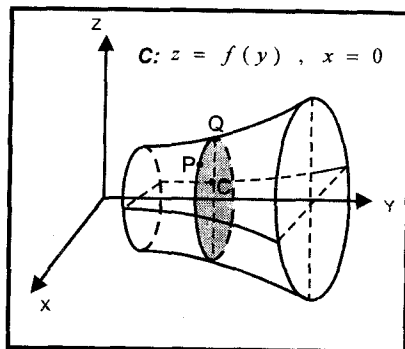


Fig. 7.16

$$Q(0; y; f(y)) \text{ y } C(0; y; 0)$$

Luego, de la definición de la superficie de revolución resulta

$$d(P; C) = D(Q; C) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + z^2} = |f(y)| \Leftrightarrow x^2 + z^2 = [f(y)]^2$$

En los otros casos, la demostración es similar.

Observación 5 Si el origen de coordenadas se traslada al punto $O'(x_0; y_0; z_0)$, las ecuaciones de las superficies de revolución de la tabla anterior tienen las siguientes formas:

$$\text{i) } (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = [f(y - y_0)]^2$$

$$\text{ii) } (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = [f(x - x_0)]^2$$

$$\text{iii) } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = [f(z - z_0)]^2$$

Ejemplo 10 En cada uno de los siguientes ejercicios se da la ecuación de la curva generadora y el eje de revolución L , determine la ecuación de la superficie de revolución y esboce su gráfica.

a) $C: z = e^y$, $x = 0$; L : eje y

b) $C: z = e^y$, $x = 0$; L : eje z

c) $C: z^2 - 4y^2 = 1$, $x = 0$; L : eje y

d) $C: z = \frac{2|x|}{1+x^2}$, $y = 0$; L : eje x

e) $C: y = x^2$, $z = 0$; L : eje x

f) $C: y = x^2$, $z = 0$; L : eje y

Solución

a) $C: z = e^y, x = 0$; $L: \text{eje } y$

La ecuación de la superficie de revolución es $x^2 + z^2 = e^{2y}$.

La gráfica se muestra en la Fig. 7.17

b) $C: y = \ln z, x = 0$; $L: \text{eje } z$

La ecuación de la superficie de revolución es $x^2 + y^2 = \ln^2 z$.

La gráfica se muestra en la Fig. 7.18

c) En este caso, $C: z = \sqrt{1 + 4y^2}, x = 0$; $L: \text{eje } y$

La ecuación de la superficie de revolución es $x^2 + z^2 = 1 + 4y^2$

La gráfica se muestra en la Fig. 7.19 (esta superficie se llama **hiperboloide de revolución o hiperboloide circular de una hoja**)

d) $C: z = \frac{2|x|}{1 + x^2}, y = 0$; $L: \text{eje } x$

La ecuación de la superficie es $y^2 + z^2 = \frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}$.

La gráfica se muestra en la Fig. 7.20

e) $C: y = x^2, z = 0$; $L: \text{eje } x$

La ecuación de la superficie de revolución es $y^2 + z^2 = x^4$.

La gráfica se muestra en la Fig. 7.21

f) $C: y = x^2, z = 0$; $L: \text{eje } y$

La ecuación de la superficie de revolución es $x^2 + z^2 = y$.

La gráfica se muestra en la Fig. 7.22

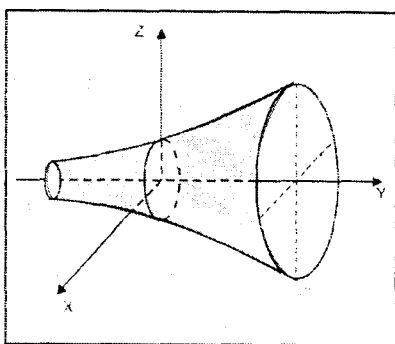


Fig. 7.17

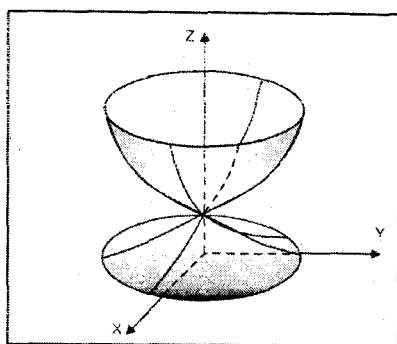


Fig. 7.18

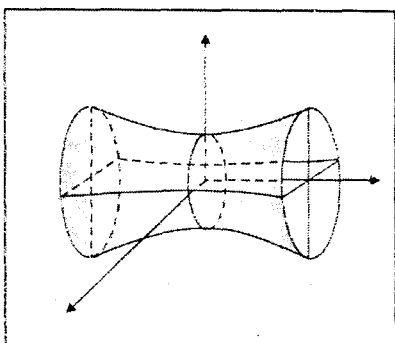


Fig. 7.19

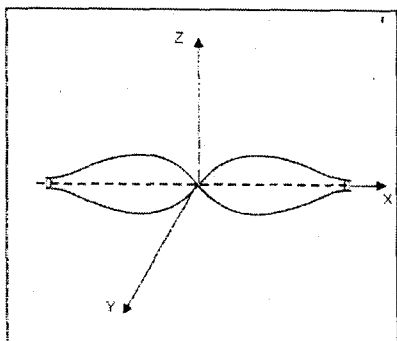


Fig. 7.20

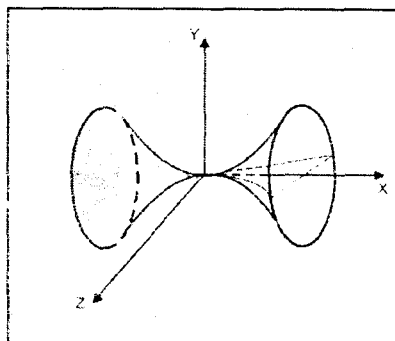


Fig. 7.21

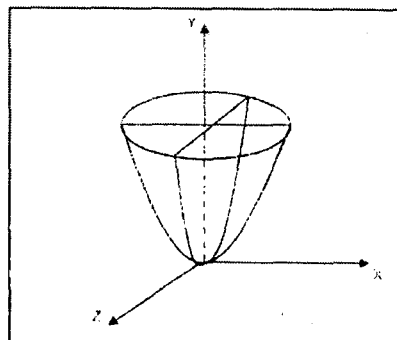


Fig. 7.22

Ejemplo 11 En cada uno de los siguientes ejercicios se da la ecuación de la curva generadora C y el eje de giro L ; halle la ecuación de la superficie de revolución.

a) $C: z = f(y), x = a$; $L: z = b, x = a$

b) $C: z = 2y - 3, x = 5$; $L: z = -1, x = 5$

c) $C: 4(x + 2)^2 - (y - 1)^2 = 1, z = 3$; L : el eje imaginario de la hipérbola

d) $C: 4(x + 2)^2 - (y - 1)^2 = 1, z = 3$; L : el eje transverso de la hipérbola

Solución

a) En la Fig. 7.23 se muestra la curva C y la recta L en el plano $x = a$. Luego,

$$C(a; y; b), Q(a; y; f(y)) \text{ y } P(x; y; z)$$

De la definición de la superficie de revolución, tenemos

$$d(P; C) = d(Q; C)$$

Por tanto, la ecuación de la superficie de revolución es

$$(x - a)^2 + (z - b)^2 = [f(y) - b]^2$$

Esta ecuación también puede obtenerse trasladando previamente el origen al punto $O'(a; 0; b)$.

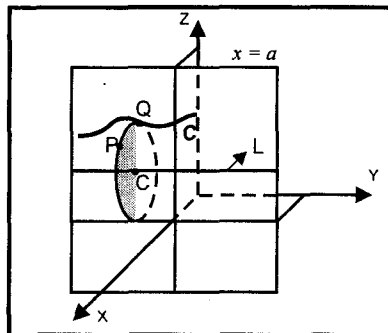


Fig. 7.23

b) $(x - 5)^2 + (z + 1)^2 = (2y - 2)^2$ (cono de revolución o cono circular)

c) $(x + 2)^2 + (z - 3)^2 - \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$ (hiperboloide circular de una hoja)

d) $(y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4(x + 2)^2 - 1$ ó

$$4(x + 2)^2 - (y + 1)^2 - (z - 3)^2 = 1 \text{ (hiperboloide circular de dos hojas)}$$

Ejemplo 12 En cada uno de los siguientes ejercicios, identifique si es una superficie de revolución. Luego, determine el eje de revolución y la ecuación de la curva generadora.

a) $x^2 = 5 + z^2 - y^2$

b) $2x^2 + 4z^2 + y^2 = 1$

c) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 4z - 4 = 0$

d) $2x^2 + 2z^2 + 4x + y - 4z + 4 = 0$

Solución

- a) $x^2 + y^2 = 5 + z^2$ (hiperboloide circular de una hoja)
- Eje de revolución $L: x = 0, y = 0$ (eje z)
 - Curva generadora $C: x = 0, y = \sqrt{5 + z^2}$ ó $y = 0, x = \sqrt{5 + z^2}$ (hipérbola)
- b) No es una superficie de revolución (ninguna de las trazas en los planos paralelos a los planos coordenados es una circunferencia).
- c) $(x + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9 - \frac{(x - 2)^2}{2}$ (elipsoide de revolución o esferoide)
- Eje de revolución $L: x = -2, z = 1$
 - Curva generadora $C: x = -2, z = 1 + \sqrt{\frac{18 - (x - 2)^2}{2}}$ (elipse)
- d) $(x + 1)^2 + (z - 1)^2 = -\frac{y}{2}$ (paraboloide circular)
- Eje de revolución $L: x = -1, z = 1$
 - Curva generadora $C: x = -1, z = 1 + \sqrt{-\frac{y}{2}}$ (parábola)

7.5 SUPERFICIES CUADRÁTICAS

Una **superficie cuadrática** o simplemente **cuádrica** es la gráfica de una ecuación de segundo grado en las variables x, y, z .

Algunas superficies cilíndricas o superficies de revolución son ejemplos de cuádricas. En ésta sección se presentará algunas formas usuales de las superficies cuadráticas cuyas ecuaciones están en su forma más simple (**forma canónica**).

Considerando que el lector está en condiciones de discutir la ecuación de una superficie, nos limitaremos a describir algunas propiedades de estas superficies.

7.5.1 ELIPSOIDE

La forma canónica de la ecuación del elipsoide con centro en el origen es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde a, b y c son números reales positivos. Además, los intervalos de variación de las variables x, y \wedge z son

$$x \in [-a; a], y \in [-b; b] \wedge z \in [-c; c]$$

Si $a^2 = b^2 = c^2$, la superficie es una **esfera**.

Si $a^2 = b^2$ (ó $b^2 = c^2$, ó $a^2 = c^2$) la superficie es un **elipsoide de revolución** o **esferoide**. Un esferoide cuyo tercer número es mayor que los dos números iguales, se llama **esferoide alargado**. (La elipse que la genera gira alrededor de su eje mayor). Si el tercer número es menor que los dos números iguales, se llama **esferoide achatado** (la elipse que la genera gira alrededor de su eje menor).

Las trazas en los planos paralelos a los planos coordenados son elipses o circunferencias. (En los planos $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ se reduce a un punto).

Esta superficie es simétrica con respecto a los planos coordenados, a los ejes coordenados y al origen de coordenadas.

La gráfica del elipsoide se muestra en la Fig. 7.24

La forma ordinaria de la ecuación del elipsoide con centro $C(h; k; l)$ es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

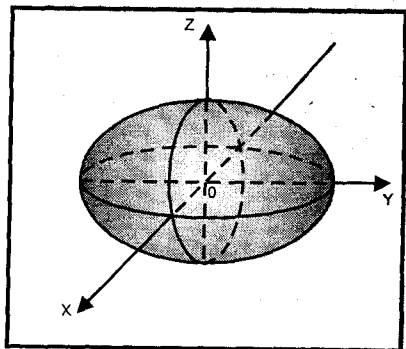


Fig. 7.24

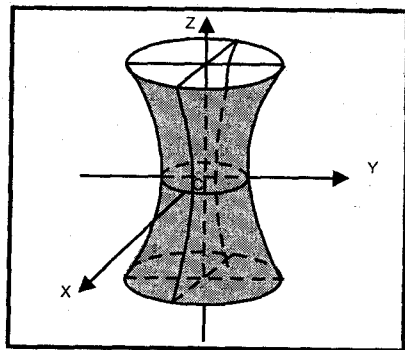


Fig. 7.25

7.5.2 HIPERBOLOIDE ELÍPTICO (CIRCULAR) DE UNA HOJA

La forma canónica de la ecuación del hiperboloide de una hoja con centro en el origen es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \left(\text{ó } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ó } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right)$$

donde a , b y c son números reales positivos.

En la Fig. 7.25 se muestra la gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

A continuación se describe algunas propiedades de esta superficie

Los intervalos de variación de las variables x , y y z son

$$x \in \langle -\infty; -a \rangle \cup [a; +\infty), y \in \langle -\infty; -b \rangle \cup [b; +\infty) \text{ y } z \in \langle -\infty; +\infty \rangle$$

Si $a^2 = b^2$, es una superficie de revolución (**hiperboloide circular de una hoja**)

Si $a^2 \neq b^2$, la superficie es el **hiperboloide elíptico de una hoja**, las trazas en los planos paralelos al plano xy son elipses o circunferencias según sea el caso en que

$$a^2 \neq b^2 \quad \text{ó} \quad a^2 = b^2$$

Las trazas en los planos paralelos a los planos xz e yz son hipérbolas. (en los planos $y = b$, $x = a$ son dos rectas que se cortan).

Esta superficie es simétrica con respecto a los ejes coordenados, a los planos coordenados y al origen de coordenadas.

La forma ordinaria de la ecuación del hiperboloide de una hoja con centro en el punto $C(h; k; l)$ es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

7.5.3 HIPERBOLOIDE ELÍPTICO (CIRCULAR) DE DOS HOJAS

La forma canónica de la ecuación del hiperboloide de dos hojas con centro en el origen es

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \left(\text{ó} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ó} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right)$$

donde a , b y c son números reales positivos.

En la Fig. 7.26 se muestra la gráfica de

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Los intervalos de variación de las variables x, y y z para esta superficie son

$$x \in \langle -\infty; +\infty \rangle,$$

$$y \in \langle -\infty; -b \rangle \cup [b; +\infty) \text{ y}$$

$$z \in \langle -\infty; +\infty \rangle$$

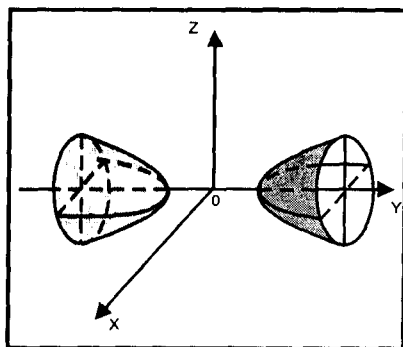


Fig. 7.26

Si $a^2 = c^2$, es una superficie de revolución (**hiperboloide circular de dos hojas**)

Si $a^2 \neq c^2$, la superficie es el **hiperboloide elíptico de dos hojas**.

Las trazas en los planos paralelos al plano xz son circunferencias o elipses según sea el caso en que $a^2 = c^2$ ó $a^2 \neq c^2$. (En el plano $y = b$ es un punto).

Esta superficie es simétrica con respecto a los ejes coordenados, a los planos coordenados y al origen de coordenadas.

La forma ordinaria de la ecuación del hiperboloide de dos hojas con centro en el punto $C(h; k; l)$ es

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

Observación 6 Las tres cuádricas (elipsoide, hiperboloide de una hoja e hiperboloide de dos hojas) también se denominan **cuádricas centrales**.

En general cualquier ecuación de la forma:

$$\pm \frac{(x-h)^2}{a^2} \pm \frac{(y-k)^2}{b^2} \pm \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

donde a, b y c son números reales positivos, representa a una cuádrica central con centro en $C(h; k; l)$.

Si los tres signos son positivos: *elipsoide*

Si dos signos son positivos y uno es negativo: *hiperboloide de una hoja*

Si dos signos son negativos y uno es positivo: *hiperboloide de dos hojas*.

Si los tres signos son negativos: *el conjunto es vacío*.

7.5.4 PARABOLOIDE ELÍPTICO (O CIRCULAR)

La forma canónica de la ecuación del paraboloide con vértice en el origen es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \quad \left(\text{ó } \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by \quad \text{ó } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax \right)$$

donde a y b son números positivos y $c \neq 0$

En la Fig. 7.27 se muestra la gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad \text{con } c > 0$$

Si $c < 0$ el paraboloide se abre hacia la parte negativa del eje z .

Los intervalos de variación de las variables x , y y z para la ecuación de esta superficie son:

$$x \in (-\infty; +\infty), y \in (-\infty; +\infty) \text{ y}$$

$$z \in [0; +\infty) \text{ (si } c < 0, z \in (-\infty; 0])$$

Si $a^2 = b^2$, la superficie es una superficie de revolución (**paraboloide circular**)

Si $a^2 \neq b^2$, la superficie es el **paraboloide elíptico**.

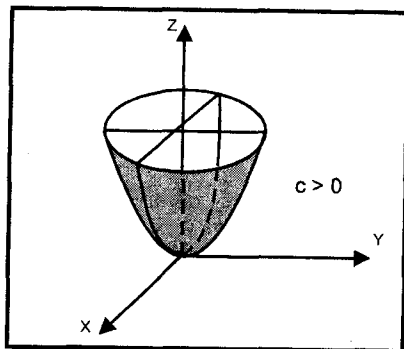


Fig. 7.27

Las trazas en los planos paralelos al plano xy son circunferencias o elipses según sea el caso en que $a^2 = b^2$ ó $a^2 \neq b^2$. (En el plano $z = 0$, la traza es un punto).

Esta superficie es simétrica con respecto al eje z , al plano xz y al plano yz .

La forma ordinaria de la ecuación del paraboloide con vértice en el punto $V(h; k; l)$ es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = c(z-l)$$

En los otros casos, la ecuación es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = b(y-k) \quad \text{ó} \quad \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = a(x-h)$$

7.5.5 PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (SILLA DE MONTAR)

La forma canónica de la ecuación del paraboloide hiperbólico con punto de silla en el origen de coordenadas es

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz \quad \left(\text{ó} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by, \text{ ó} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax \right)$$

donde a y b son números positivos y $c \neq 0$.

En la Fig. 7.28 se muestra la gráfica de

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz, \text{ con } c > 0$$

Los intervalos de variación para las variables x , y y z de esta superficie son

$$x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty) \text{ y } z \in (-\infty, +\infty)$$

Las secciones transversales al plano xy son hipérbolas (En el plano $z = 0$ son dos rectas que se cortan). Las trazas en los planos paralelos a los planos xz e yz son parábolas.

Esta superficie es simétrica con respecto al eje z , al plano xz y al plano yz .

El origen de coordenadas es el punto de silla de esta superficie.

La forma ordinaria de la ecuación del paraboloides hiperbólico con punto de silla en $S(h; k; l)$ es

$$\frac{(y - k)^2}{b^2} - \frac{(x - h)^2}{a^2} = c(z - l)$$

En los otros casos, la ecuación es de la forma

$$\frac{(z - l)^2}{c^2} - \frac{(x - h)^2}{a^2} = b(y - k) \quad \text{ó} \quad \frac{(z - l)^2}{c^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = a(x - h)$$

7.5.6 CONO ELÍPTICO (O CIRCULAR)

La forma canónica de la ecuación del cono con vértice en el origen de coordenadas es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad \left(\text{ó} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ó} \quad \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \right)$$

donde a , b y c son números reales positivos.

En la Fig. 7.29, se muestra la gráfica de la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Los intervalos de variación de las variables x , y y z son

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad z \in \mathbb{R}$$

Si $a^2 = b^2$, la superficie es de revolución (**cono circular**).

Si $a^2 \neq b^2$, la superficie es el **cono elíptico**.

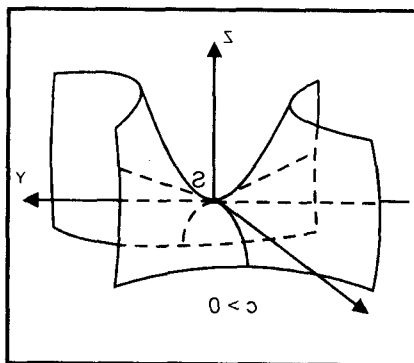


Fig. 7.28

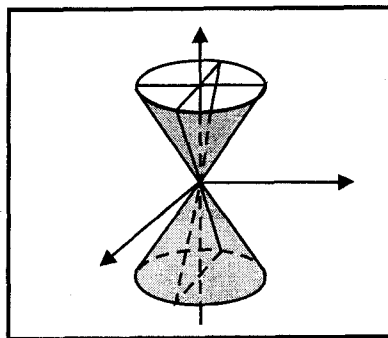


Fig. 7.29

Las trazas en los planos paralelos al plano xy son circunferencias o elipses según sea el caso en que $a^2 = b^2$ ó $a^2 \neq b^2$. (En el plano $z = 0$ la traza es el origen de coordenadas). Las trazas en los planos paralelos al plano xz y al plano yz son hipérbolas (En los planos $y = 0$ \wedge $x = 0$ son dos rectas que se cortan).

Esta superficie es simétrica con respecto a los ejes coordenados, a los planos coordenados y al origen de coordenadas.

La forma ordinaria de la ecuación del cono con vértice el punto $V(h; k; l)$ es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \frac{(z-l)^2}{c^2}$$

En los otros casos, la ecuación es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = \frac{(y-k)^2}{b^2} \quad \text{ó} \quad \frac{(z-l)^2}{c^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \frac{(x-h)^2}{a^2}$$

Ejemplo 13 Discutir y graficar la ecuación $9x^2 + 4z^2 + 9y = 0$

Solución

I) Intersección con los ejes coordenados: el origen de coordenadas.

II) Trazas sobre los planos coordenados

i) Sobre el plano xy :

la parábola $x^2 + y = 0$

ii) Sobre el plano yz :

la parábola $4z^2 + 9y = 0$

iii) Sobre el plano xz :

el origen de coordenadas

III) Trazas en planos paralelos a los planos coordenados

Al plano xy : parábolas

Al plano yz : parábolas

Al plano xz : elipses, (para $y < 0$)

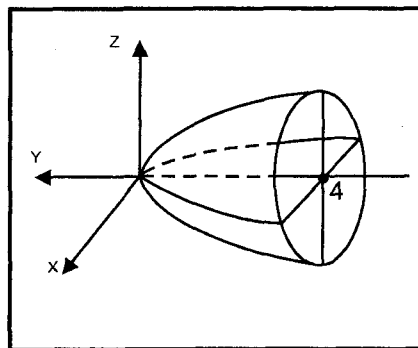


Fig. 7.30

IV) Extensión: $x \in \mathbb{R}$, $y \in (-\infty; 0]$, $z \in \mathbb{R}$

V) La gráfica de la superficie se muestra en la Fig. 7.30 (paraboloide elíptico).

Ejemplo 14 Esboce la gráfica de las siguientes ecuaciones

a) $3x^2z + y^2z - 9z^2 = 0$

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z|z|}{9} = 1$

Solución

a) $3x^2z + y^2z - 9z^2 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + y^2 - 9z)z = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + y^2 - 9z = 0 \quad \text{ó} \quad z = 0$$

La ecuación $3x^2 + y^2 - 9z = 0$ representa a un paraboloide elíptico.

La ecuación $z = 0$ representa al plano xy .

La gráfica de la ecuación $(3x^2 + y^2 - 9z)z = 0$ se muestra en la Fig. 7.31

b) Utilizando la definición del valor absoluto en

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z|z|}{9} = 1$$

se tiene

Si $z < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ (elipsoide)

Si $z > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$ (hiperboloide de una hoja)

La gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z|z|}{9} = 1$ se muestra en la Fig. 7.32

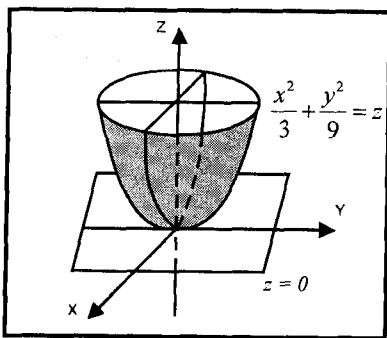


Fig. 7.31

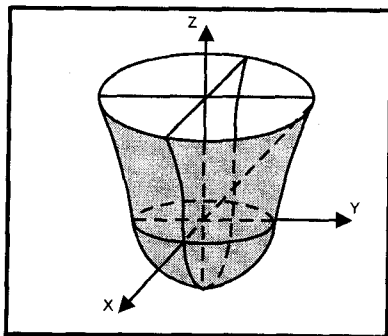


Fig. 7.32

7.6 COORDENADAS CILÍNDRICAS Y COORDENADAS ESFÉRICAS

Las coordenadas de uso frecuente en el espacio tridimensional, aparte de las rectangulares son las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas.

7.6.1 COORDENADAS CILÍNDRICAS

Si P es un punto del espacio tridimensional y $(x; y; z)$ son sus coordenadas rectangulares, se define las **coordenadas cilíndricas** de P como la terna $(r; \theta; z)$, donde $(r; \theta)$ son las coordenadas polares de la proyección ortogonal de P sobre el plano xy y z es la distancia dirigida de $(r; \theta)$ a P (Fig. 7.33).

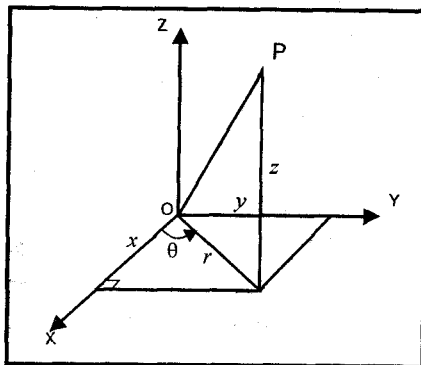


Fig. 7.33

7.6.1.1 RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y CILÍNDRICAS

Si $(x; y; z)$ y $(r; \theta; z)$ son respectivamente las coordenadas cartesianas y las coordenadas cilíndricas de un punto $P \in \mathbb{R}^3$, entonces se tiene

Cartesianas en términos de las cilíndricas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

Cilíndricas en términos de las cartesianas

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad z = z$$

Observación 7

- Las **coordenadas cilíndricas principales** son: $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ \wedge $z \in \mathbb{R}$.
- Las **coordenadas cilíndricas del origen** son $(0; \theta; z)$ para cualquier θ .
- La ecuación de un cilindro circular recto de radio a en coordenadas cartesianas es $x^2 + y^2 = a^2$, transformando a coordenadas cilíndricas su ecuación es $r = a$.

Ejemplo 15

- i) Encuentre las coordenadas cartesianas del punto que tiene las coordenadas cilíndricas dadas
- a) $(3; \frac{\pi}{2}; 5)$ b) $(7; \frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{4})$ c) $(1; 0; 1)$
- ii) Encuentre un conjunto de coordenadas cilíndricas del punto cuyas coordenadas cartesianas son
- a) $(4; 4; -2)$ b) $(-3\sqrt{3}; 3; 6)$ c) $(1; 1; 1)$

Solución

- i) a) Si las coordenadas cilíndricas de P son $(3; \pi/2; 5)$, entonces $r = 3$, $\theta = \pi/2$ y $z = 5$. Luego, aplicando las fórmulas que relacionan estas coordenadas con las cartesianas se tiene

$$x = 3 \cos(\pi/2) = 0, \quad y = 3 \sin(\pi/2) = 3 \quad y \quad z = 5$$

Por tanto, las coordenadas cartesianas de P son $(0; 3; 5)$

Procediendo de manera similar se obtiene

b) $(-\frac{7}{2}; \frac{7\sqrt{3}}{2}; -4)$ c) $(1; 0; 1)$

- ii) a) Si las coordenadas cartesianas de P son $(4; 4; -2)$, entonces $x = 4$, $y = 4$ y $z = -2$

Luego, aplicando las fórmulas que relacionan estas coordenadas con las cilíndricas tiene

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \quad r^2 = x^2 + y^2 = 32 \Rightarrow r = 4\sqrt{2}, \quad z = -2$$

Por tanto, las coordenadas cilíndricas de P son $(4\sqrt{2}; \pi/4; -2)$

b) $(6; 5\pi/6; 6)$ c) $(\sqrt{2}; \pi/4; 1)$

Ejemplo 16 Halle una ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie representada por la ecuación cartesiana

a) $2x + y - z = 0$ b) $x^2 + y^2 = 4z$

c) $x^2 - y^2 - 4z^2 - 4 = 0$

Solución

Reemplazando $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y $z = z$, se obtiene

a) $2r \cos \theta + r \sin \theta - z = 0$

b) $r^2 = 4z$

c) $r^2 \cos 2\theta - 4z^2 - 4 = 0$

7.6.2 COORDENADAS ESFERICAS

Las coordenadas esféricas de un punto $P \in \mathbb{R}^3$, se define como la terna $(\rho; \theta; \phi)$, donde ρ representa la distancia del punto P al origen, ϕ es la medida del ángulo que forma el segmento \overline{OP} con el rayo positivo del eje z (el ángulo ϕ se llama **co-latitud** de P , el ángulo $\pi/2 - \phi$ se llama **latitud** de P) y θ es la medida del ángulo que forma el rayo positivo del eje x y el segmento \overline{OQ} , donde Q es la proyección (ortogonal) de P sobre el plano xy (Fig. 7.34)

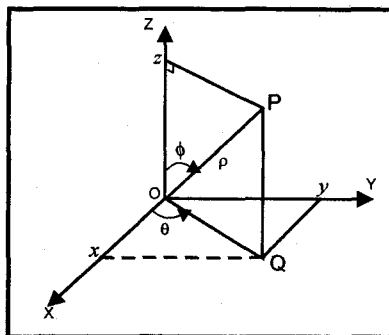


Fig. 7.34

7.6.2.1 RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y ESFÉRICAS

Si $(x; y; z)$ y $(\rho; \theta; \phi)$ son respectivamente las coordenadas cartesianas y las coordenadas esféricas de un punto $P \in \mathbb{R}^3$, entonces se tiene

Cartesianas en términos de las esféricas

$$z = \rho \cos \phi$$

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

Esféricas en términos de las cartesianas

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \phi \quad \wedge \quad \frac{y}{x} = \tan \theta$$

Observación 8

a) Si se incluye los puntos del eje z , las restricciones

$$\rho > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

determinan una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y las coordenadas esféricas $(\rho; \theta; \phi)$

b) Las coordenadas esféricas del origen son $(0; \theta; \phi)$, donde θ, ϕ son arbitrarios.

c) La ecuación cartesiana de la esfera con centro en el origen y radio a es

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Al transformar a coordenadas esféricas se reduce a $\rho = a$

Ejemplo 17

- i) Encuentre las coordenadas esféricas de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son
a) $(2; 2; 2)$ b) $(0; 0; -3)$
- ii) Encuentre las coordenadas rectangulares de los puntos cuyas coordenadas esféricas son
a) $(3; \pi/2; \pi/4)$ b) $(2; -\pi/3; \pi/6)$

Solución

- i) Utilizando las fórmulas de transformación de coordenadas cartesianas a esféricas, tenemos
- a) $(2\sqrt{3}; \pi/4; \arccos(1/\sqrt{3}))$ b) $(3; 0; \pi)$
- ii) Usando las fórmulas de transformación de coordenadas esféricas a cartesianas, se tiene
- a) $(0; 3\sqrt{2}/2; 3\sqrt{2}/2)$ b) $(1/2; -\sqrt{3}/2; \sqrt{3})$

EJERCICIOS

1. Encuentre coordenadas esféricas para los siguientes puntos especificados por sus coordenadas rectangulares
 - a) $(4; 2; -4)$
 - b) $(1; -\sqrt{3}; 4)$
 - c) $(1; 1; 1)$
 - d) $(2; 0; 2)$
2. Halle las coordenadas cilíndricas para los puntos del ejercicio 1.
3. Halle las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas cilíndricas
 - a) $\left(2; \arccos \frac{3}{5}; 0\right)$
 - b) $\left(10; -\frac{\pi}{2}; 4\right)$
 - c) $\left(1; \frac{\pi}{4}; 2\right)$
 - d) $\left(-1, -\frac{\pi}{4}, 1\right)$
4. Halle las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas esféricas
 - a) $\left(2; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$
 - b) $\left(3; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$
 - c) $\left(1; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$
 - d) $\left(6; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right)$

5. Halle una ecuación en coordenadas cilíndricas de la superficie cuya ecuación en coordenadas cartesianas es
- a) $(x + y)^2 = z - 5$ b) $x^2 z^2 = 25 - y^2 z^2$
 c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ d) $ax + by + cz = x^2 + y^2 + z^2$
6. Las siguientes superficies están descritas en coordenadas esféricas. Encuentre sus ecuaciones rectangulares.
- a) $\cot \phi = \sec \theta + \cos \theta$ b) $\rho^2 \cos 2\phi = a^2$
 c) $\rho = a \sec \phi \sec \theta$ d) $\rho^2 \sin^2 \phi \sin 2\theta = a^2$
7. Halle una ecuación en coordenadas esféricas, para la esfera de radio 3 con centro en $(0; 1; 0)$
8. Halle una ecuación en coordenadas cilíndricas para la esfera del ejercicio 7.
9. En los siguientes ejercicios, encuentre las ecuaciones en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas para la superficie dada.
- a) El paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$ b) El hiperboloide $xy = z$
10. Describir la superficie $z = 2r$ (coordenadas cilíndricas), y obtener una ecuación de la misma en coordenadas cartesianas.
11. Halle una ecuación en coordenadas rectangulares(cartesianas) de la superficie $z^2 = 1 - (r - 2)^2$

7.7 APLICACIONES

Ejemplo 17 Calcule el volumen del sólido limitado por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$

Solución

La ecuación $z = x^2 + y^2$ representa un paraboloide circular. Las secciones transversales perpendiculares al eje z son círculos de radio $r = \sqrt{z}$ (Fig. 7.35).

El área de cada sección transversal es

$$A(z) = \pi z, \quad z \in [0; 4]$$

Por consiguiente, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V(S) &= \int_0^4 A(z) dz = \int_0^4 \pi z dz \\ &= 8\pi u^3 \end{aligned}$$

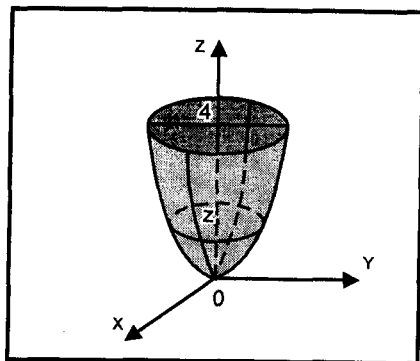


Fig. 7.35

Ejemplo 19 ¿La ecuación $x^2 + y^2 - e^{2z} = 0$ representa una superficie de revolución? En caso afirmativo, halle el área de la superficie comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 1$ y calcule la longitud de arco de la curva generadora.

Solución

$x^2 + y^2 = e^{2z}$ representa una superficie de revolución. El eje de revolución es el eje z , ($x = 0$, $y = 0$) y una curva generadora es $C: y = e^z$, $x = 0$

Para determinar el área de la superficie de revolución comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 1$ (Fig. 7.36), basta considerar el arco de la curva $y = e^z$, $z \in [0; 1]$ en el plano $x = 0$ y hacerla girar alrededor del eje z . (Fig. 7.37)

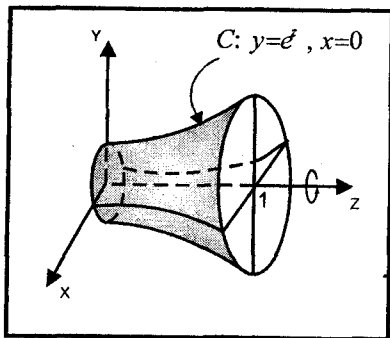


Fig. 7.36

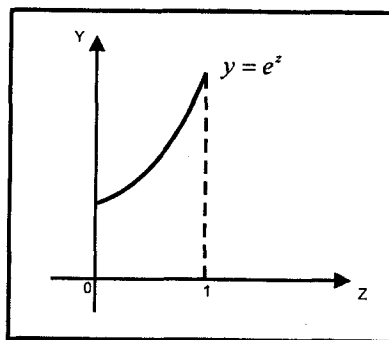


Fig. 7.37

Luego, el área de esta superficie de revolución es

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^1 y \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dz}\right]^2} dz = \int_0^1 e^z \sqrt{1 + e^{2z}} dz \\ &= \frac{1}{2} \left[e \sqrt{1 + e^2} + \ln \left(\frac{e + \sqrt{1 + e^2}}{1 + \sqrt{2}} \right) - \sqrt{2} \right] u^2 \end{aligned}$$

La longitud de arco de la curva generadora resulta

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dz}\right]^2} dz = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2z}} dz$$

Haciendo la sustitución trigonométrica $e^z = \tan \theta \Leftrightarrow z = \ln(\tan \theta)$, obtenemos

$$\begin{aligned} L &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan e} \frac{1}{\sen \theta \cos^2 \theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan e} (\csc \theta + \tan \theta \sec \theta) d\theta \\ &= \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1 + e^2} - 1}{e} \right) - \ln(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} \right] u \end{aligned}$$

Ejemplo 20 Calcule el volumen del sólido limitado por las superficies

$$9x^2 - 9y^2 + 4z^2 - 36x - 8z + 4 = 0, \quad y = -1 \quad \wedge \quad y = 4$$

Solución

Al completar cuadrados en la ecuación de la superficie se obtiene

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Así, la superficie es un hiperboloide elíptico de una hoja cuyo centro es $C(2; 0; 1)$.

La gráfica del sólido se muestra en la Fig. 7.38. Las secciones transversales del sólido perpendiculares al eje y son las elipses

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} = 1 + \frac{y^2}{4} \quad \text{ó}$$

$$\frac{(x-2)^2}{4t} + \frac{(z-1)^2}{9t} = 1, \quad \text{donde } t = \frac{4+y^2}{4}$$

Luego, el área de la elipse (sección transversal) es

$$A(y) = \pi(2\sqrt{t})(3\sqrt{t}) = 6\pi\left(\frac{4+y^2}{4}\right), \quad y \in [-1; 4]$$

Usando el método de secciones transversales, el volumen del sólido es

$$V(S) = \int_{-1}^4 A(y) dy = \frac{3}{2}\pi \int_{-1}^4 (4+y^2) dy = \frac{125\pi}{2} u^3$$

Ejemplo 21 Calcule el volumen del sólido limitado por la superficie

$$y^2 + z^2 - 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x - \cos^2 x = 0 \quad \text{y los planos } x = 0 \quad \text{y } x = \pi/2.$$

Solución

La ecuación se puede escribir como $y^2 + z^2 = (\operatorname{sen} x + 1)^2$. Esta ecuación representa una superficie de revolución cuyo eje de giro es el eje x .

La sección transversal del sólido perpendicular al eje x es el círculo

$$y^2 + z^2 = (\operatorname{sen} x + 1)^2, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Así, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi(\operatorname{sen} x + 1)^2, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Por consiguiente, el volumen del sólido resulta

$$V(S) = \int_0^{\pi/2} A(x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x + 1)^2 dx = \frac{\pi(3\pi + 8)}{4} u^3$$

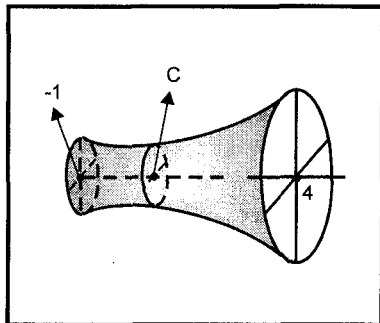


Fig. 7.38

Ejemplo 22 Calcule el volumen del sólido limitado por las superficies

$$2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$$

Solución

La ecuación $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ representa a un paraboloide con vértice en el origen y la ecuación

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$ representa a un cono con vértice en el origen.

Estas superficies se intersecan cuando

$$z^2 = 2z \Leftrightarrow z = 0 \vee z = 2$$

La sección transversal del sólido, perpendicular al eje z , es el anillo elíptico cuya área es

$$A(z) = \pi(\sqrt{8z})(\sqrt{18z}) - \pi(\sqrt{4z^2})(\sqrt{9z^2}) = 12\pi z - 6\pi z^2, z \in [0; 2]$$

Por lo tanto, el volumen del sólido es

$$V(S) = \int_0^2 (12\pi z - 6\pi z^2) dz = 8\pi$$

Ejemplo 23 Un sólido está limitado por las superficies

$$S_1: \rho = \frac{1}{3} \cot \phi \csc \phi \quad (\text{en coordenadas esféricas})$$

$$S_2: z = 3 \quad (\text{en coordenadas cilíndricas})$$

Bosqueje la gráfica y calcule el volumen del sólido.

Solución

Utilizando las relaciones entre las coordenadas esféricas y las coordenadas cartesianas: $z = \rho \cos \phi$,

$y = \rho \sin \phi \sin \theta$, $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ se tiene $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \phi$.

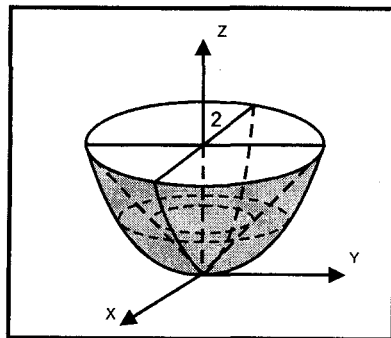


Fig. 7.39

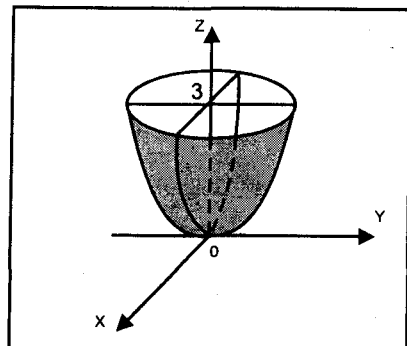


Fig. 7.40

De la ecuación de S_1 resulta

$$3\rho = \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \Leftrightarrow 3\rho^2 \sin^2 \phi = \rho \cos \phi \Rightarrow 3(x^2 + y^2) = z$$

Esta ecuación representa a un paraboloide circular.

Por otro lado, la ecuación cartesiana de S_2 es $z = 3$.

La gráfica del sólido se muestra en la Fig. 7.40. Las secciones transversales del sólido, perpendiculares al eje z , son círculos de radio $r = \sqrt{z/3}$. Así, el área de la sección plana es

$$A(z) = \frac{\pi z}{3}, \quad z \in [0; 3]$$

Usando el método de secciones planas, el volumen del sólido resulta

$$V(S) = \int_0^3 \frac{\pi z}{3} dz = \frac{3\pi}{2} u^3$$

Ejemplo 24 Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(0; -2; 4)$ y es tangente al cilindro $S: 2y = x^2$. El ángulo que forma dicha recta con el plano xy es de 30° (4 soluciones).

Solución

Sea $P_0(a; b; c)$ el punto de tangencia (Fig. 7.41 izquierda). En la vista horizontal (visto desde arriba hacia abajo - Fig. 7.41 derecha), se tiene

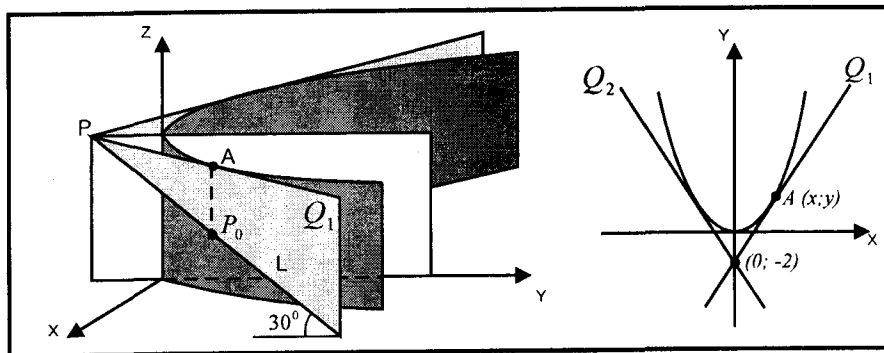


Fig. 7.41

Pendiente de la tangente: $m = \frac{y+2}{x}$ (α)

También $m = \frac{dy}{dx} = x$. Luego, $\frac{y+2}{x} = x$ (β)

Por otro lado, $A(x; y; z)$ pertenece al cilindro, entonces

$$2y = x^2 \quad (\gamma)$$

De (γ) y (β) se obtiene $y = 2$, $x = \pm 2$

Si se reemplaza $m = \pm 2$ en (α) se obtiene las ecuaciones de los planos tangentes $Q_1: y + 2 = 2x$ y $Q_2: y + 2 = -2x$

1. Considerando el plano tangente $Q_1: 2x - y - 2 = 0$, se tiene:

$$P_0 \in Q_1 \Rightarrow 2a - b - 2 = 0$$

$$P_0 \in S \Rightarrow 2b = a^2$$

De estas dos ecuaciones se obtiene $a = 2$ y $b = 2$

Dado que el ángulo que forma la recta con el plano xy es 30° , entonces

$$\sin 30^\circ = \frac{|\vec{P_0P_1} \cdot (0; 0; 1)|}{\|\vec{P_0P_1}\|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|c - 4|}{\sqrt{a^2 + (b + 2)^2 + (c - 4)^2}}$$

Reemplazando el valor de $a = 2$ y $b = 2$, se obtiene

$$\frac{1}{4} = \frac{|c - 4|}{\sqrt{20 + (c - 4)^2}} \Rightarrow c = 4 \pm \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

Luego, las ecuaciones de las rectas tangentes son

$$L_1: P = (0; -2; 4) + t \left(1; 2; \frac{\sqrt{15}}{3} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$L_2: Q = (0; -2; 4) + \lambda \left(1; 2; -\frac{\sqrt{15}}{3} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Considerando el plano tangente $Q_2: 2x + y + 2 = 0$, se obtienen las soluciones:

$$L_3: P = (0; -2; 4) + t \left(-1; 2; \frac{\sqrt{15}}{3} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$L_4: Q = (0; -2; 4) + \lambda \left(-1; 2; -\frac{\sqrt{15}}{3} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Los puntos de tangencia son $(-2; 2; 4 \pm \frac{2\sqrt{15}}{3})$

EJERCICIOS

I. En cada uno de los siguientes ejercicios, discutir y graficar la superficie representada por cada ecuación

a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

b) $x^2 + 4y^2 + 4z = 0$

c) $x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$

d) $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$

e) $4x^2 + 8y + z^2 = 0$

f) $x^2 + 9y^2 = z^2$

g) $25y^2 - x^2 - 9z^2 = 0$

h) $x^2 + 4y^2 = 4z^2 - 4z + 1$

i) $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$

j) $x^2 + y^2 = 1 + z$

k) $16x^2 - 9y^2 - z^2 - 144 = 0$

l) $y^2 + 16x^2 = 64 - 4z^2$

II. En cada uno de los ejercicios, calcule el volumen del sólido limitado por las superficies

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

R. $\left(\frac{4}{3}\pi abc\right)u^3$

2) $8z = x^2 + 4y^2, z = 1$

R. $(\sqrt{2}\pi)u^3$

3) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, z = -1, z = 2$

R. $(36\pi)u^3$

4) $z = x^2 + 2y^2, x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$

(dos soluciones)

5) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1, \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

(tres soluciones)

6) $(x-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}, z = 0$

R. $\left(\frac{8\pi\sqrt{6}}{3}\right)u^3$

7) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z|z|}{16} = 1, z = 3$

R. $\left(\frac{299}{8}\pi\right)u^3$

III. Halle la ecuación de la recta L que pasa por $P_1(0; -7; 3)$ y es tangente a la superficie cilíndrica $y = 5 - (x - 4)^2$. La recta L corta a la recta

$L_1: P = (1; 1; 1) + t(0; 2; -3), t \in \mathbb{R}$ (dos soluciones)

$L': Q = (0; -7; 3) + t(1; 12; -8), t \in \mathbb{R}$

$L'': R = (0; -7; 3) + \lambda(1; 4; 4), \lambda \in \mathbb{R}$